



R

RESEARCH REPORT

IMPACT OF THE HOMEBUYERS'
PLAN ON HOUSING DEMAND

**EXTERNAL
RESEARCH
PROGRAM**



HOME TO CANADIANS
Canada

CMHC—HOME TO CANADIANS

Canada Mortgage and Housing Corporation (CMHC) is the Government of Canada's national housing agency. We help Canadians gain access to a wide choice of quality, affordable homes.

Our mortgage loan insurance program has helped many Canadians realize their dream of owning a home. We provide financial assistance to help Canadians most in need to gain access to safe, affordable housing. Through our research, we encourage innovation in housing design and technology, community planning, housing choice and finance. We also work in partnership with industry and other Team Canada members to sell Canadian products and expertise in foreign markets, thereby creating jobs for Canadians here at home.

We offer a wide variety of information products to consumers and the housing industry to help them make informed purchasing and business decisions. With Canada's most comprehensive selection of information about housing and homes, we are Canada's largest publisher of housing information.

In everything that we do, we are helping to improve the quality of life for Canadians in communities across this country. We are helping Canadians live in safe, secure homes. CMHC is home to Canadians.

You can also reach us by phone at 1 800 668-2642
(outside Canada call (613) 748-2003)
By fax at 1 800 245-9274
(outside Canada (613) 748-2016)

To reach us online, visit our home page at www.cmhc.ca

Canada Mortgage and Housing Corporation supports the Government of Canada policy on access to information for people with disabilities. If you wish to obtain this publication in alternative formats, call 1 800 668-2642.

Impact of the Home Buyers' Plan on Housing Demand

Frédéric Chartrand and Mario Fortin
Economics Department
Université de Sherbrooke

June 13, 2003

This Project was funded (or: partially funded) by Canada Mortgage and Housing Corporation (CMHC) under the terms of the External Research Program, but the views expressed are the personal views of the author(s) and do not represent the official views of CMHC.

Impact of the Home Buyers' Plan on Housing Demand

Frédéric Chartrand and Mario Fortin^{*}
Economics Department
Université de Sherbrooke
June 13, 2003

Summary

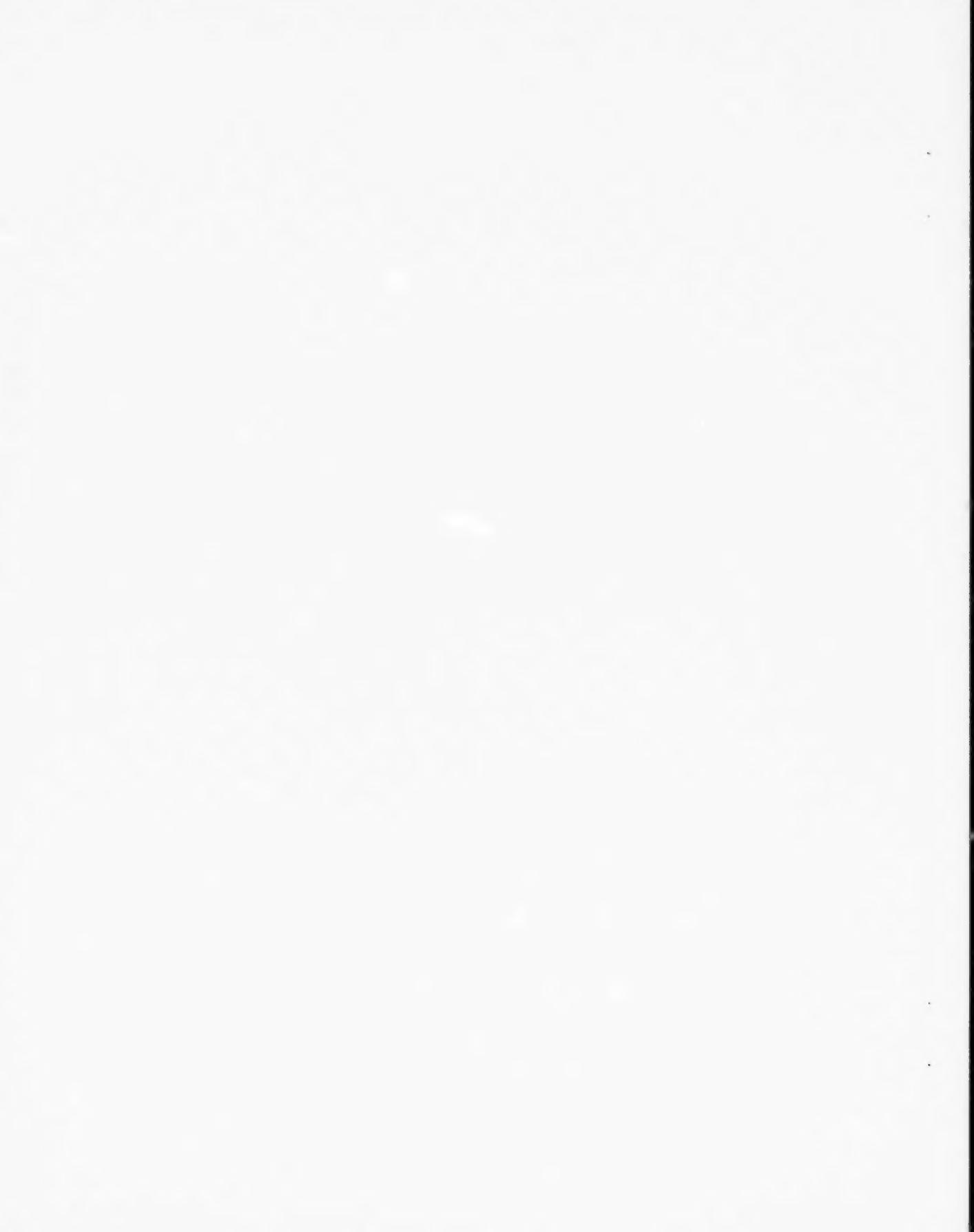
We are studying the effect of the Home Buyers' Plan (HBP) on housing demand. The study is theoretical and is based on a continuous-time life-cycle model in which the household draws satisfaction from the use of a composite asset and from housing services. The analysis is carried out in stages. First, we integrate the Registered Retirement Savings Plans (RRSP) into the life-cycle model. One interesting result is that, based on the hypothesis that household income is taxed at a constant rate throughout life, the rate applicable to accumulation of savings becomes the net real interest rate when there are unused RRSP contributions. We then demonstrate that RRSP withdrawals permitted under the HBP result in a gain in wealth proportionate to the taxation rate; this gain remains stable for households that must borrow to contribute to an RRSP but that do not repay the RRSP. The impact of the gain in wealth is distributed equally among the use of the composite asset, the use of the home and terminal wealth. The effect on housing demand is therefore always positive. Furthermore, the household will reduce its initial debt.

Key Words: Housing demand, life-cycle

^{*} This research was made possible through the financial support of the Canada Mortgage and Housing Corporation as part of the External Research Program. We would like to thank CMHC, as well as Ian Melzer and the participants in the "Urban and Regional Economics" session of the 2002 *Canadian Economics Association* conference for their comments and suggestions.

Table of Contents

<u>1</u>	<u>Introduction</u>	3
<u>2</u>	<u>Context and Problem</u>	4
2.1	<u>The Home Buyers' Plan</u>	4
2.2	<u>Issue of the HBP and RRSPs relative to Housing Demand</u>	6
2.3	<u>Key Factors in the Decision to Purchase a Home</u>	7
<u>3</u>	<u>Impact of the HBP on Wealth</u>	9
3.1	<u>Hypotheses and Definition of Wealth</u>	9
3.2	<u>Impact of the HBP on Wealth</u>	10
<u>4</u>	<u>Influence of the HBP on Housing Demand</u>	15
4.1	<u>Variables and Hypotheses of the Base Model Without RRSP</u>	15
4.2	<u>Model With RRSP Asset</u>	19
4.3	<u>Model With RRSP Assets and HBP</u>	24
4.3.1	<u>Description of the Model With RRSP Assets and HBP</u>	24
4.3.2	<u>Model Solution</u>	26
<u>5</u>	<u>Conclusion</u>	28



1 INTRODUCTION

The purchase of a home is a very important expenditure to which owner-occupants allocated an average 19.6% of their budget in 1997 (Statistics Canada, 2000). Its importance is such that housing demand has gained a specific place in the theory of life cycle consumption (Artle and Varaiya, 1978). However, due to the various constraints encountered and the many elements of the cost of residential property, the decision to purchase a home has proven complex to model. The household must consider lifetime wealth, the price of renting a home instead of becoming owner-occupant, its ability to assume the common housing expenditures, the implicit cost of home equity and borrowing constraints. The latter in effect limits the value of the mortgage loan based on equity and the household's repayment capacity.

Because of the social and economic importance of access to homeownership, governments are intervening in the sector in various ways. The decision to buy a home is thus also influenced by the tax benefits offered. As theoretical literature has come mostly from the United States, there are few articles that examine the specifics of the Canadian tax system. The necessary adjustments first relate to the deductibility of mortgage interest and property taxes from taxable income. In the United States, these two expenses are deductible, except for households that claim the standard deduction, while they are not deductible in Canada. However, capital gain from a principal residence is never taxable in Canada, while it may be in the United States. These Canadian particularities were integrated into the housing demand theory by Fortin (1988). However, there are other differences, two of which we will examine in this document. First, the impact of Registered Retirement Savings Plans (RRSP) has never been integrated into the life-cycle theory. *A fortiori*, its impact on housing demand has not been studied either. Furthermore, the effect of the Home Buyers' Plan (HBP) has not been established either.

The Home Buyers' Plan is undoubtedly the most innovative element adopted by the Canadian government in the last ten years to change the terms of home financing. The purpose of the HBP is to make housing more affordable and facilitate access to the amounts that a household must amass to cover their initial down payment. In short, the HBP allows up to \$20,000 to be withdrawn from RRSPs without incurring penalties if that amount is used to cover the down payment for the home. Such withdrawals must be repaid through a series of annual payments of at least

1/15 of the amount withdrawn over a maximum period of 15 years. Should households fail to make the required repayment, they must add the amount in default to their taxable income.

This tax measure is very popular. Between its introduction in February 1992 and 1998, the HBP has enabled over 777,000 individuals to withdraw close to \$7.5 billion from their RRSPs to finance the purchase of their first home (Manouchehri 1999). However, no one has yet developed a firm argumentation or an adequate modeling of the advantages and drawbacks of the HBP. This issue is all the more important in that the behaviour of the participants in the plan is quite varied. In fact, despite the growing popularity of the HBP, it can be seen that a significant proportion of participants do not make the repayment required into their RRSPs according to the terms of the HBP. The Home Buyers' Plan therefore presents some excellent questions: Can the program have financial drawbacks for some households? Does the creation of the HBP permit increased consumption of residential capital? Does the possibility of early, tax-free withdrawal of funds already contributed represent a benefit that is likely to attract more fortunate households that are not subject to strict borrowing constraints? What households benefit most from the program?

The purpose of this document is to analyze the impact of the HBP on housing demand. The analysis is theoretical and makes use of the housing demand model based on the continuous-time life-cycle analysis. This model was applied to housing demand by Artle and Varaiya (1978) and has since been used many times, particularly by Wheaton (1985) in the United States and Fortin (1988) in Canada. In short, the study seeks to verify how the HBP influences housing demand. The work is structured as follows: In the next section, we identify the context and problem of RRSPs and the HBP and then examine the key factors at play in the decision to purchase a home. In section three, we examine the wealth gain resulting from the use of the HBP. In the fourth section, we develop a continuous-time life-cycle model in order to see the effect of the HBP on certain model variables. We present conclusions in the final section.

2 CONTEXT AND PROBLEM

2.1 The Home Buyers' Plan

The purchase of a home is a major investment, particularly for young families that often have difficulty in obtaining the necessary financing to cover the down payment. The HBP is designed to reduce this obstacle to purchasing. Generally, the HBP permits a household that has never owned

a home to withdraw up to \$20,000 from RRSPs for the purchase or construction of an eligible home without having to include the HBP-eligible withdrawals in taxable income.¹ Repayment of the amounts withdrawn from RRSPs may be spread over a maximum of 15 years, with a minimum annual repayment of 1/15 of the amount initially withdrawn. If the annual repayment is lower than the minimum, the difference is added to taxable income for the year in which the repayment was due. Since 1999, eligibility criteria have been broadened to include former homeowners, on condition that they have not owned a home for five years.

This program is very popular. In 1998 alone, the federal government's Home Buyers' Plan helped more than 110,000 individuals to become owner-occupant. In all, these individuals withdrew more than \$1.1 billion from their RRSPs to purchase homes (Manouchehri 1999, 10), which, as indicated in Table 1.1, is similar to use observed in previous years.

Table 1.1
HBP Participation²

Period Covered	Participants	Withdrawals in \$M
26/02/1992 to 1/03/1993	159,000	1,536
2/03/1993 to 1/03/1994	102,000	1,011
2/03/1994 to 31/12/1994	56,000	455
1/01/1995 to 31/12/1995	79,000	718
1/01/1996 to 31/12/1996	119,000	1,136
1/01/1997 to 31/12/1997	132,000	1,306

However, the HBP is not without its problems. In 1995, one third of the 230,000 taxpayers required to make repayments did not do so. As the unpaid amounts are treated as taxable RRSP withdrawals, 76,000 taxpayers had to pay taxes on those amounts (Frenken 1998). We will see in a later section that, in fact, not making the repayments is not very costly. Furthermore, as indicated in Table 1.2, the provincial distribution of HBP participants represents very closely the population shares of the provinces. Thus, the average withdrawal varies greatly from one province to another. The average withdrawal varied from \$6,824 in Nova Scotia to \$11,518 in Quebec. At first glance, the amount of the

¹ For the various eligibility criteria, see *Home Buyers' Plan (HBP) - For 1998 Participants* (1988).

² Source: Frenken (1998) "The RRSP Home Buyers' Plan." *Perspectives on Labour and Income* 10(2), Statistics Canada, p. 41

average withdrawal does not seem to be tied to the per-capita income or average home prices.

Table 1.2
Provincial Distribution of HBP Participation in 1998³

Province	No. of Participants	Withdrawal in \$
Newfoundland	886	7,344
Prince Edward Island	236	7,501
Nova Scotia	1,929	7,228
New Brunswick	1,227	6,824
Quebec	33,658	11,511
Ontario	45,550	9,533
Manitoba	2,640	6,983
Saskatchewan	1,975	6,585
Alberta	11,063	7,808
British Columbia	11,699	9,344
NWT	117	10,572
Yukon	113	8,642
Total	111,063	9,376

2.2 Issue of the HBP and RRSPs relative to Housing Demand

Before a theoretical study of the HBP based on life-cycle, is it essential that the context of RRSPs be established as relates to housing demand. In Canada, Registered Pension Plans (RPP) and RRSPs were created to meet certain social and economic objectives.

The main social goal is to provide an adequate level of income for people upon retirement (and also to reduce government expenditure for this purpose). In addition, the RRSP scheme allows individuals to average their income over their lifetimes. The economic objective is to encourage savings, and thus to increase the supply of funds available for investment (Boadway and Kitchen 1999, 120).

As RRSPs allow the contributor to defer taxes on contributions and gains until they withdraw from the plan, there are many contributors, particularly among the more fortunate. For 1992, RRSP contributors with

³ Source: Manouchehri (1999), p. 11

income of \$40,000 or more, although representing only 26% of taxpayers, accounted for 63.3% of contributions. Those earning less than \$25,000, 45.4% of taxpayers, in turn only accounted for 11.5% of contributions (Ascah 1996).

A first home is usually purchased at an age when households do not have much equity. The low level of wealth in young households is often the main obstacle to purchasing and the HBP represents a way of reducing this difficulty. However, as low-income households do not contribute much to RRSPs, this obviously limits the amounts that they may withdraw from their RRSPs to finance the purchase of a first home. Furthermore, since households show a desire to be homeowners fairly early in life, since the income of young households is lower and since they have not been able to contribute for as long as older households, the amount that they can withdraw from RRSPs as part of the HBP is obviously limited. One strategy that can be used to bypass this problem is to take out a loan at a financial institution for the amount to be contributed to an RRSP and to then withdraw the funds. We will examine how this strategy is used in the rational decision-making of households.

However, one of the difficulties in studying the HBP is that RRSPs have yet to be integrated into the life-cycle theory and, *a fortiori*, in that of housing demand. This lack of theoretical basis does not stop personal finance specialists from arguing for or against the use of the HBP and RRSPs in home purchases. Before developing our argument on this matter, we will in the next section see the key factors in deciding to become an owner-occupant. This will allow us to identify what elements are changed by the RRSP and HBP.

2.3 Key Factors in the Decision to Purchase a Home

Many factors play in the decision to purchase a home. The first is, of course, the service costs for an owner-occupied home as opposed to the cost of residential rental because, if buying is cheaper than renting, this encourages people to become homeowners. That said, residential property does not present a large cost benefit over rental. In effect, as demonstrated by Fortin (1991), many elements influence the relative cost of both types of occupancy: the real interest rate, inflation rates, the amount of the mortgage debt compared to financing with equity and various tax considerations (capital cost deduction, capital gains taxation rates, and investment income taxation rates). We will not examine all of these elements in depth, but will instead lend our attention to those elements that are modified by the HBP and RRSPs.

The equity invested in a home involves an implicit cost equal to the net-of-tax return that those funds would have created had they been invested in the most competitive investment. A household with unused RRSP contributions can receive an investment benefit for which taxation is deferred until withdrawal from the plan. The benefit relinquished by the household is then higher than that sacrificed by the household that used all contributions because, in the latter case, investment income is taxable annually. The service costs for owner-occupied homes are therefore higher when a household can contribute to an RRSP.

Total income and its temporal distribution both play a role in the decision to purchase. In effect, total income, i.e., the current value of lifetime household income, must be sufficient to meet the overall financial obligations of the residential property. The distribution of income over time, on the other hand, has an effect because households face two borrowing constraints when purchasing a home. The wealth constraint exists because financial institutions cannot grant an ordinary mortgage loan that exceeds 75% of the value of the home or a loan insured under the *National Housing Act* that exceeds 95% of the value of the home. In concrete terms, this means that a household cannot purchase a home worth more than 20 times the equity at their disposal. Thus, before even purchasing a home, the household must be able to save from their own everyday income the equity required by the mortgage lender. In addition to the wealth constraint, the loan is also subject to an income restraint, as the amount of the loan must not be such that the borrower allocates more than a certain percentage of everyday income to housing costs. This second constraint effectively limits the maximum amount of the loan, based on a formula that uses the nominal interest rate on the mortgage and the duration of the amortization plan selected. Thus, a household with income that is concentrated late in life may purchase a home later than a household with an identical overall income that is earned more quickly.

Artle and Varaiya (1978) were the first to model the decision to purchase a major non-liquid asset, in this case a residential home, using a life-cycle model. They demonstrate that the household's temporal consumption profile is distorted when borrowing constraints are binding because there is forced saving prior to purchase. Inflation compounds these effects. Kearl (1979) was one of the first to study the impact of distortion of mortgage payments due to inflation. Without developing a formal model, he nonetheless notes that inflation, through higher nominal interest rates, increases mortgage payments at the beginning of home ownership. The gradual increase in prices and nominal income, however, then progressively reduces the real value of the payments. In some cases,

inflation can result in households delaying the purchase of a home, or completely abandoning the idea. In addition, although the explicit modeling of the consumer problem is faulty, Kearn concludes that increased inflation reduces the value of the home to be bought by the household when liquidity is limited. Wheaton (1985) was the first to develop a formal model for studying the effect of inflation. As he notes, inflation causes three types of distortion that can influence the decision to become a homeowner. "Inflation raises mortgage payments through higher interest rates, [it] causes such payments to fall rapidly over time in real terms, and it creates a real growth in housing equity, as borrowed debt is leverage against the inflating value of homes" (Wheaton 1985, 161).

Two opposing effects of inflation are involved. When borrowing constraints related to household income are binding, the amount that can be borrowed decreases as anticipated inflation increases. However, this acceleration of inflation also reduces the net real rate of return on a household's investments if tax is paid on investment income, reducing the home service costs.⁴ Thus, the property has greater fiscal benefit when the monthly payments are most difficult. Fortin (1989) uses simulations to demonstrate that the impact of amortization distortions is negligible when inflation is low, but becomes more significant when inflation rises. Thus, an increase in low inflation rates favours increased housing demand, while an increase tends to have an opposite effect when rates are already high. It should be noted, however, that if return on equity is not taxed each year, as is the case with RRSPs, inflation then has no impact on the net return on equity. The only remaining effect of inflation is that of distorting amortization. Inflation, then, cannot have any positive impact on owner-occupied housing demand for taxpayers with unused RRSP contributions.

Before presenting the housing demand model, we will, in the next section, examine the effect of the HBP on wealth.

3 IMPACT OF THE HBP ON WEALTH

3.1 Hypotheses and Definition of Wealth

To clearly identify the potential monetary benefit of the HBP, we will avoid discussing the presence of liquidity constraints to see how the changes to initial distribution of assets and debts made possible by the HBP result in financial gains. Most obvious is that, because the HBP

⁴ The reasoning put forth in this paragraph is based on the hypothesis that real interest rates before taxes remain unchanged while inflation varies.

consists of reducing the mortgage debt by withdrawing from an RRSP, the financial benefit of the withdrawal can be changed at will by postulating a difference between the mortgage and RRSP interest rates. In order to disregard this, our analysis presupposes a nominal interest rate i that is identical for the mortgage and the RRSP. In practice, due to the banking margin, a situation in which the return on the RRSP is higher than the mortgage interest rate is probably not likely if we only consider investments with a risk level comparable to that of the mortgage. Our hypothesis thus consists of ignoring this margin and thus giving an edge to RRSP investments compared to the actual situation.

Furthermore, an advantage can also be given to or taken away from the RRSP by presupposing a taxation rate at the time of the contributions that differs from that applied at the time of withdrawal more specifically, by presupposing a lower (higher) rate at the time of withdrawal than at the time of contribution, a benefit (disadvantage) as relates to the RRSP investment. It is very difficult to justify one hypothesis over the other. For example, we can assume that withdrawals will be made at a time when the taxpayer is not working. As the tax system is progressive, we would be justified in believing that the withdrawals would be taxed at a lower rate. However, old age security benefits are subject to a recovery provision. If the RRSP withdrawals result in the household attaining a sufficient level of income for this provision to apply, the effective taxation rate for the withdrawals will be considerably higher. We will disregard these situations and assume a tax rate that is constant throughout life.

Finally, the household's situation when the contributions are made can vary, as the household may or may not need to borrow to contribute. As we are disregarding the effect of the bank margin, we will assume that the household can borrow to contribute at a minimal gross nominal interest rate of i , which is also the interest rate for the mortgage and the return rate for the RRSPs. We will study two situations, one in which the household borrows to make RRSP contributions and one in which the contributions come instead from liquid assets. We will also distinguish between a situation in which the household makes the required repayments and that in which it does not repay the RRSP and instead pays the tax penalty.

3.2 Impact of the HBP on Wealth

Suppose that a household has sufficient initial wealth to contribute to an RRSP without borrowing. Their wealth can be invested in three ways: in a liquid financial asset with the real value represented by a , in an active RRSP with the real value represented by w , or finally, in a home. The

housing stock is represented by h with the real unit price represented by P . The real value of the owned home is therefore Ph , from which we subtract the real value of the mortgage debt, D , to obtain the net value of the home: $a = Ph - D$. We suppose that the household's income is subject to a constant marginal tax rate of m . Having contributed w to an RRSP, the household benefits from a tax reduction of mw , such that it has only cost the household $(1 - m)w$ in liquid assets to obtain an RRSP worth w . Conversely, as RRSP withdrawals are taxable, withdrawing the full RRSP will only increase liquid assets by $(1 - m)w$. Thus, the household's initial net real wealth, R , is represented by equation (1).

$$R = a + (Ph - D) + (1 - m)w \quad (1)$$

Equation (1) defines the household's wealth if the HBP is not used. We assume that the HBP permits an amount, $k\theta$ to be withdrawn from the participant's RRSP to be applied to the net value of the home, on condition that the withdrawn amount to be recontributed, without a tax deduction, in k equal instalments worth θ each. If we use R^* to designate the initial wealth of a household withdrawing under the HBP, this is equal to the right side of equation (2).

$$R^* = a + (Ph - D + k\theta) + (1 - m)(w - k\theta) \quad (2)$$

The effect of the HBP on wealth is calculated by taking the difference between R^* and R . However, this difference must reflect the negative impact on the potential accumulation resulting from the obligation to either re contribute to the RRSP without benefiting from the tax deductions or to pay taxes on the default repayment. To this end, we compare (1) and (2) after the RRSP has been fully repaid or the tax penalties have been fully paid. In our reasoning, we assume that the gross nominal interest rate on the liquid assets, the active RRSP and the debt is i . As indicated previously, we thus eliminate the possibility of arbitrarily creating an advantage for one situation by assuming that one asset has a higher return rate. As interest income from investments other than RRSPs is taxable, the net return on liquid assets is only $(1 - m)i$. With an inflation rate of π , the real net return rate is $n = (1 - m)i - \pi$. The real return rate on the RRSP and mortgage debt is $r = i - \pi$. It should be noted that the difference between the net interest rate for the RRSP and that of liquid assets is $r - n = mi$, thus proportional to the proceeds of the marginal taxation rate and the nominal interest rate.

Let us first examine the situation in which a household does not participate in the program and calculate the household's wealth after k years. Liquid assets will have increased at a rate of n , permitting an actual amount of $a(1+n)^k$ to be accumulated. As to the mortgage debt, it compounds at an interest rate r . The net value of the home after k years will thus be only $Ph - (1+r)^k D$. As regards to the RRSP assets, they will be worth $(1-m)w(1+r)^k$ after k years, as the amount withdrawn from the RRSP is taxable when the funds are withdrawn. Thus, wealth without the use of the HBP will be the sum of the three assets, as follows:

$$R = a(1+n)^k + Ph - D(1+r)^k + (1-m)w(1+r)^k \quad (3)$$

Let us now examine a situation in which the household participates in the HBP. Following an initial withdrawal of $k\theta$, the household must deduct the θ amount from its liquidities each year after the end of the first year. After k years, the household will have accumulated liquidities in the amount of $a(1+n)^k - \theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right]$, less than if the household does not

participate in the HBP due to the annuity required for making repayments (see Appendix 1). On the other hand, the net worth of the home will have increased more rapidly, as the initial mortgage debt was lower. Thus, after k years, the net worth of the home reaches $Ph - (D - k\theta)(1+r)^k$. As for RRSP assets, they are also less than they would have been without the withdrawal, because of the loss of accumulated return between the time of the initial withdrawal and the repayment. After k years, the accumulated value reaches $(1-m) \left[(w - k\theta)(1+r)^k + \theta \left(\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right) \right]$. The real accumulated worth after k years of a household participating in the HBP is the sum of the three previous elements as follows:

$$R^* = a(1+n)^k - \theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right] + Ph - (D - k\theta)(1+r)^k + (1-m)(w - k\theta)(1+r)^k + \theta(1-m) \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] \quad (4)$$

To conclude that HBP participation results in a wealth gain, one needs only see if $R^* - R > 0$, where R^* is wealth after k years with participation in the program. This difference is obtained as follows:

$$\frac{R^* - R}{\theta} = \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] - m \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] + km(1+r)^k - \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right] \quad (5)$$

Thus, by analyzing the equations, we see that the difference is null if $m = 0$ and is positive if $m > 0$ (see Appendix 1). This result is very easy to explain. When the government grants a household the right to a tax-free RRSP withdrawal, it is as though it were agreeing to lend the RRSP tax credit interest-free. The amount of the gain thus increases with the household's taxation rate (because the "loan" by the government is greater) and with the nominal interest rate (because the "loan" is proportional to nominal income at any given tax rate). From the financial standpoint, it is best to delay the repayment as late as possible in order to benefit for a longer period of time from the interest-free loan from the government. Thus, all households with a positive taxation rate financially benefit from using the HBP, but those with the highest taxation rate, i.e., the highest income, benefit the most. Thus the HBP does not favour a progressive tax system.

Analysis also shows that households experience a wealth gain even when they do not repay the required amounts, but pay the tax on the unpaid amounts instead. In effect, if repayment is not made, there is an accumulation of liquid assets after k years in the amount of

$$a(1+n)^k - m\theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right],$$

while that of the active RRSP and the net value of the home are represented respectively by $(1-m)(w - k\theta)(1+r)^k$ and $Ph - (D - k\theta)(1+r)^k$. Once again, if we examine the difference in wealth when the HBP is used and when it is not, we obtain

$R^* - R = m\theta k(1+r)^k - m\theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right]$ (see Appendix 1), a difference that is positive if $m > 0$. Again, the household receives a gain from participating in the HBP if its income is taxable. Note that the gain is less than in the previous example, as the household saves less in its RRSP. On the other hand, as it is paying only $m\theta$ each year instead of θ , it disposes of a higher available income for consuming other goods. The reason such a high percentage of households do not repay their RRSPs is undoubtedly because the choice to re-contribute or pay the taxes on the contributions not made is reduced to a decision whether or not to save at a rate of r .

We have also examined situations in which households make the repayments under the HBP, but must borrow the amounts necessary for the repayments at an interest rate of r . Let us assume that in this case the household does not initially have any liquidity. Note that the accumulation of RRSP assets and the net value of the home is identical to that of the first case, as nothing has changed in this regard. The change relates to liquid assets because, after k years, it will have decreased by $-\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right]$. We can

see that the difference in wealth is $R^* - R = mk\theta(1 + r)^k > 0$. This latter expression is very simple and corresponds to the capitalized value of the "loan" by the government at a rate of r after k years. In the previous examples, the expression was more complex because we needed to take into account the fact that the initial contribution and the repayment to the RRSP were made by drawing from liquid assets with a before-tax return rate of just n instead of r .

Because of its simplicity and the fact that it applies to the less favourable situation, this latter expression lends itself well to an approximate evaluation of the present value of the financial gain for participating households, and the cost of the program for the government. In effect, the present value is simply $mk\theta$. Since the maximum withdrawal is \$20,000, this present value is \$8,000 for a household with a marginal taxation rate of 40%. If we apply this same marginal rate to the \$7.5 billion that were withdrawn under the HBP between 1992 and 1998, the program provided \$3 billion in direct financial assistance from the government to households purchasing homes. To this, we must eventually add the loss in tax revenues associated with RRSP repayments from liquidity for which the return would have been taxable.

In short, the HBP provides a financial benefit to all taxed households, whether or not they must borrow to contribute to the RRSP prior to withdrawing the amounts, whether or not they borrow to repay, or whether or not they make the repayments. This gain is greater for higher-taxed households and for those that can contribute to an RRSP and repay it without borrowing. The reason many participants do not repay their RRSPs according to the terms set forth is that the decision to repay is justified by the desire to save at a rate of r . A household that has borrowed to contribute to an RRSP for the sole purpose of withdrawing under the HBP was not initially a lender. It borrows to take advantage of the tax benefit, but will probably decide not to repay the RRSP and to pay the tax on the payments not made. Finally, note that the value of the gain increases with the income taxation rate and the nominal interest rate. The recent fall in interest rates is therefore likely to make the Home Buyers' Plan less attractive.

4 INFLUENCE OF THE HBP ON HOUSING DEMAND

4.1 Variables and Hypotheses of the Base Model Without RRSP

In this section, we integrate RRSPs and the HBP into a continuous-time life-cycle model to see the possible effects of adding RRSPs and the HBP on residential capital consumption. Since RRSPs has never been studied using such a model, we first develop a basic model inspired by Fortin (1988) that includes neither an RRSP nor the HBP. We then progressively add these elements, first RRSPs and then the HBP, to see how each changes the optimal choice.

Let us consider a household that wishes to maximize at the date t_1 the function $\int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta t} U(c(t), h) dt$ plus a certain terminal value function that depends on the wealth in t_2 . In the model, t_1 and t_2 are, respectively, the dates on which the home is bought and sold, while δ represents the pure rate of time preference, $c(t)$ represents the instantaneous consumption rate of the Hicksian aggregate that serves as numeraire and h represents the flow of services drawn from the residential capital stock. We consider that h is directly proportional to the residential capital stock, such that it designates both the housing stock and the flow of services from them. We disregard the temporal indicator for h because we assume that this variable is initially chosen by the household, but must remain fixed throughout the period in which the household owns and occupies the home. These two arguments are put forth as separable and the utility function is also assumed to be additively separable and strictly concave, which means that the marginal rate of substitution is decreasing, but also that the marginal consumption utility is positive and diminishing in both arguments.

Consumer choices are limited by constraints regarding total resources and cash flow. Households receive an exogenous constant real liquid income stream at a rate of y . This income can be consumed or saved. The accumulated value of liquid savings is indicated by $a(t)$ and this asset is capitalized at a rate of n , where n is the net real interest rate. The total net flow of return of the liquid asset in t is thus indicated by $na(t)$, which is added to the income y to give the stream of new liquid asset availability. Following the approach developed by Artle and Varaiya (1978) in studying the effect of liquidity constraints on housing demand, we apply a non-negativity constraint on $a(t)$. Such a constraint hinders a household from borrowing because it pledges its future earnings. Given the low level

of unsecured borrowing ability of households compared to the actual value of future income, such a hypothesis better complies with households' actual borrowing abilities.⁵

To establish the instantaneous liquidity variation, we must take into account disbursement of liquid assets. In addition to $c(t)$ there are expenditures related to housing services. As we are examining the period of the plan in which the household owns a home, we have chosen to take into account only mortgage capitalization costs. We are therefore disregarding other housing-related expenses (maintenance costs, property taxes, etc.), as including them would have no qualitative effect on the results of the analysis. The symbol $v(t)$ designates the real value of the flow of mortgage disbursements for each capital unit, while h represents the number of residential capital units purchased by households. As we are assuming that the mortgage loan is amortized over an annuity period of s with a constant nominal value, the real mortgage disbursements decrease in real terms due to inflation. If each residential capital unit has an asset price of P , the cost of acquiring the h units is Ph . We will assume that the initial mortgage lending value is $D(t_1)$. The expression governing the flow of mortgage disbursements over the period t is thus:

$$\begin{aligned} v(t) &= (r + \pi)D(t_1)e^{-\pi(t-t_1)}(1 - e^{-(r+\pi)s-t_1})^{-1} \\ v(t) &= v(t_1)e^{-\pi(t-t_1)} \end{aligned} \quad (6)$$

By subtracting disbursements from available liquid resources, we obtain an expression regarding the rate of change for liquid assets if $a(t)$ is positive, as follows:

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h \quad (7)$$

In addition to liquid assets, a household can accumulate wealth in the form of the net value of a home that it owns and occupies. This net value in the period t , indicated as $\alpha(t)$, is obtained by subtracting the value of the residual mortgage debt $D(t)$ from the home's asset price Ph , thus $\alpha(t) = Ph - D(t)$, or $D(t) = Ph - \alpha(t)$. If we assume that interest is collected

⁵ This statement is easy to understand. Letting the loan be limited only by lifetime financial resources is paramount to recognizing that a 25-year old household that expects to have a real annual income of \$50,000 for 40 years would be able to borrow close to \$857,000 at an interest rate of 5% with no other guarantee but the promise to repay. Clearly, lenders offer unsecured credit for only a small fraction of this amount.

on the value of the residual debt at a rate of r , i.e., the gross real interest rate, then the following relation must be verified:

$$rD(t) = r(Ph - \alpha(t)) = rPh - r\alpha(t) \quad (8)$$

The rate of change of the real home equity is given by the difference between the mortgage payment $v(t)h$ and the previous expression, that is:

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (9)$$

This expression is non-null for owner-occupant and shows that the implicit return rate on home equity is the gross real interest rate r , since it is the amount saved on mortgage debt interest charges when the household repays a dollar of debt. We assume that $\alpha(t)$ is non-liquid and indivisible. The household cannot therefore sell or rent a part of the home; we can call this a hypothesis of mutual exclusivity of occupation.

The household thus faces constraints when accumulating wealth. In view of these constraints, the household must decide as to the number of capital units h that it wishes to purchase. Note that, due to the non-liquid and indivisible nature of the home, the only way for a household to have access to the net value of the home is to sell it. The date t_2 corresponds to the time when the household decides to sell the home. This optimal control problem can thus be formulated as follows:

$$\max_{c(t), h} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\tilde{\alpha}} U(c(t), h) dt + V(a(t_2) + \alpha(t_2), t_2)$$

subject to

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= na(t) + y - c(t) - v(t)h \\ \dot{\alpha}(t) &= r\alpha(t) + v(t)h - rPh \\ a(t_1) &= \alpha(t_1) - (Ph - D(t_1)) \\ \alpha(t_1) &= Ph - D(t_1) \\ a(t) &\geq 0, t_1 \leq t \leq t_2 \\ a(t_2) &\text{ free} \\ \alpha(t_2) &\text{ free} \\ t_2 &\text{ free} \end{aligned}$$

and where $V(a(t_2) + \alpha(t_2), t_2)$ is the terminal value function. The additive formulation $a(t_2) + \alpha(t_2)$ means that, at the time of sale, the household is indifferent as to the makeup of its wealth. This hypothesis is

easy to understand because, immediately following the sale, all wealth is converted into liquid assets. The expression $a(t_1^-)$ designates liquidities immediately prior to the date t_1 on which the home is purchased.

At this optimal control problem can be associated the following Hamiltonian function and necessary conditions (see Kamien and Schwartz 1981). First, for the Hamiltonian function, we have:

$$H = e^{-\delta t} U(c(t), h) + \gamma_a (na(t) + y - c(t) - v(t)h) + \gamma_\alpha (ra(t) + v(t)h - rPh) + \mu a(t)$$

As for the necessary conditions, they are represented by:

$$U_c \cdot e^{-\delta t} = \gamma_a \quad (10)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h \cdot e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_a [v(t) - n \frac{da(t_1)}{dh}] + \gamma_\alpha [rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dh} - v(t)]) dt \quad (11)$$

or

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h \cdot e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^s (\gamma_a [v(t) - n \frac{da(t_1)}{dh}] + \gamma_\alpha [rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dh} - v(t)]) dt + \int_s^{t_2} \gamma_a n P dt \quad (12)$$

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h \quad (13)$$

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (14)$$

$$\dot{\gamma}_a + n\gamma_a = -\mu \quad (15)$$

$$\dot{\gamma}_\alpha + r\gamma_\alpha = 0 \quad (16)$$

$$\mu_a = 0, \mu \geq 0, a \geq 0 \quad (17)$$

$$a(t_2)[\gamma_a(t_2) - \partial V / \partial a(t_2^-)] = 0, \quad a(t_2) \geq 0, \quad \gamma_a(t_2) \geq \partial V / \partial a(t_2^-) \quad (18)$$

$$\gamma_a(t_2) - \partial V / \partial a(t_2^-) = 0 \quad (19)$$

$$[H(t_2) + \partial V / \partial t_2][T - t_2] = 0, \quad H(t_2) \geq \partial V / \partial t_2, \quad T \geq t_2 \quad (20)$$

A similar problem was solved in Fortin (1988): we will not re-examine the solution here. We should note, however, that the relevant rate for determining the consumption path is the rate r as long as the mortgage is not fully amortized but becomes rate n after the complete amortization of the mortgage loan. If the house is sold before the loan is fully repaid the

rate remains r throughout the entire ownership period and the first-order condition that applies to optimize the choice of h is then 11. However, if the mortgage loan is amortized before the sale of the home, condition 12 applies to choose optimally h . In the next section, we will add the possibility of saving in an RRSP and see what solution emerges.

4.2 Model With RRSP Asset

We now assume that the household can, in addition to the asset elements seen earlier, accumulate wealth in an RRSP asset, for which the real value in period t is indicated by $w(t)$. Withdrawals from the RRSP are always taxable at a rate of m , while contributions result in a tax reduction equal to a fraction, m , of the contribution. Thus the net impact on liquid assets of a contribution flow to the RRSP asset $\rho(t)$ is $(1-m)\rho(t)$. We assume that the capitalization rate for the RRSP asset is identical to the interest rate on the mortgage debt, rate r , such that the flow of accumulation in t will be $rw(t)$. The movement equation for the RRSP asset will thus be $\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t)$, while that of the liquid assets is modified to become $\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t)$. There is no change to the equation of $\dot{\alpha}(t)$.

The initial purchasing conditions are the same as with the base model in terms of a and α , but for w we now have $w(t_1) = w(t_1^-)$, as the amount accumulated in the RRSP prior to the purchase date is considered as given. Finally, we must also modify the terminal value function, which becomes $V(a(t_2) + \alpha(t_2) + (1-m)w(t_2), t_2)$ to reflect the taxation of the RRSP asset when it is transformed into liquidity on the sale date t_2 . We therefore assume that, at t_2 , the household withdraws the full RRSP.

With these differences from the base model, the optimal control problem with RRSP assets is formulated as follows:

$$\max_{c(t), h(t)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta t} U(c(t), h) dt + V(a(t_2) + \alpha(t_2) + (1-m)w(t_2), t_2)$$

subject to:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t) \\ \dot{w}(t) &= rw(t) + \rho(t) \\ \dot{\alpha}(t) &= r\alpha(t) + v(t)h - rPh \end{aligned}$$

$$a(t_1) = a(t_1^-) - (Ph - D(t_1))$$

$$w(t_1) = w(t_1^-)$$

$$\alpha(t_1) = Ph - D(t_1)$$

$$a(t) \geq 0$$

$$a(t_2), w(t_2), \alpha(t_2) \text{ and } t_2 \text{ free}$$

with $v(t) = (r + \pi)D(t_1)e^{-\pi(t-t_1)}(1 - e^{-(r+\pi)(t-t_1)})^{-1}$ where $D(t_1)$ represents the initial mortgage debt.

The Hamiltonian function is $H = e^{-\delta t}U(c(t), h) + \gamma_a(na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t)) + \gamma_\alpha(r\alpha(t) + v(t)h - rPh) + \gamma_w(rw(t) + \rho(t)) + \mu a$

and the necessary conditions are:

$$U_c e^{-\delta t} = \gamma_a \quad (21)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_a [v(t) - n \frac{d\alpha(t_1)}{dt}] + \gamma_\alpha [rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dt} - v(t)]) dt \quad (22)$$

or

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_a [v(t) - n \frac{d\alpha(t_1)}{dt}] + \gamma_\alpha [rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dt} - v(t)]) dt + \int_{t_1}^{t_2} \gamma_a n P dt \quad (23)$$

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t) \quad (24)$$

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (25)$$

$$\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t) \quad (26)$$

$$\dot{\gamma}_a + n\gamma_a = -\mu \quad (27)$$

$$\dot{\gamma}_\alpha + r\gamma_\alpha = 0 \quad (28)$$

$$\dot{\gamma}_w + r\gamma_w = 0 \quad (29)$$

$$\mu a = 0, \quad \mu \geq 0, \quad a \geq 0 \quad (30)$$

$$a(t_2)[\gamma_a(t_2) - \frac{\partial V}{\partial a(t_2)}] = 0, \quad a(t_2) \geq 0, \quad \gamma_a(t_2) \dot{\gamma}_a \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \quad (31)$$

$$\gamma_a(t_2) - \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} = 0 \quad (32)$$

$$\gamma_w(t_2) - \frac{\partial V}{\partial w(t_2)} = 0 \quad (33)$$

$$H(t_2) + \frac{\partial V}{\partial t_2} = 0 \quad (34)$$

Condition 21 indicates the evolution of the marginal consumption utility of $c(t)$ in time. Conditions 22 and 23 have identical interpretations, but differ according to whether the house is sold before or after the complete amortization of the mortgage loan. They indicate that consumption of housing services must satisfy a relationship of equality between the present value of marginal service flow and that of the real net costs of those services. Equations 24, 25 and 26 give us, respectively, the rate of change of a , α and w , while the rate of change of the implicit price of these same assets is given, respectively, by equations 27, 28 and 29. We therefore know that the implicit price of the net value of the home and the RRSP asset decrease at a rate of r . However, μ appears in the determination of the implicit price of the liquid asset due to the constraint of non-negativity in equation 30. Thus, the implicit price of liquid assets must decrease at a rate of n if $a > 0$, but could follow a different path if $a = 0$. Equations 31, 32 and 33 indicate the conditions of transversality that must be satisfied for the value of the three assets to be optimal when the home is sold. Finally, condition 34 determines the optimal date for the sale of the home.

This model permits us to demonstrate that, if a household has unused RRSP contributions, it will not hold liquid assets. We do so by showing that $a(t) > 0$ is incompatible with an optimal solution. In effect, $a(t) > 0$ implies, in equation 30, that $\mu = 0$ and, as a result, in equation 27, $\dot{\gamma}_a + r\gamma_a = 0$. In addition, we know from equations 28 and 29 that $\dot{\gamma}_\alpha + r\gamma_\alpha = 0$ and $\dot{\gamma}_w + r\gamma_w = 0$, such that $\gamma_\alpha(t)$ and $\gamma_w(t)$ will be respectively represented by $\gamma_\alpha(t) = \gamma_\alpha(t_1)e^{-r(t-t_1)}$ and $\gamma_w(t) = \gamma_w(t_1)e^{-r(t-t_1)}$ between t_1 and t_2 . Thus, the implicit price of a decreases at rate n , while those of α and w decrease at rate r . It remains to determine the absolute level of these prices, which is made by the conditions of transversality. But if the non-negativity constraint on $a(t)$ is non-binding, we know, by equation 31, that $\gamma_a(t_2) = \frac{\partial V}{\partial a(t_2)}$, while equations 32 and 33 show that $\gamma_\alpha(t_2) = \frac{\partial V}{\partial \alpha(t_2)}$ and

$\gamma_w(t_2) = \frac{\partial V}{\partial w(t_2^-)}$. Furthermore, as $a(t_2) = a(t_2^-) + \alpha(t_2^-) + (1-m)w(t_2^-)$, this means that $\frac{\partial a(t_2)}{\partial a(t_2^-)} = 1$, $\frac{\partial a(t_2)}{\partial \alpha(t_2^-)} = 1$ and $\frac{\partial a(t_2)}{\partial w(t_2^-)} = (1-m)$. Thus the chain rule allows us to write:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial a(t_2^-)} &= \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \frac{\partial a(t_2)}{\partial a(t_2^-)} = \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha(t_2^-)} &= \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \frac{\partial a(t_2)}{\partial \alpha(t_2^-)} = \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \\ \frac{\partial V}{\partial w(t_2^-)} &= \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \frac{\partial a(t_2)}{\partial w(t_2^-)} = (1-m) \frac{\partial V}{\partial a(t_2)}\end{aligned}$$

We therefore find the following relationships between the implicit prices at date t_2 :

$$\gamma_a(t_2) = \gamma_\alpha(t_2) = \frac{1}{(1-m)} \gamma_w(t_2)$$

At the precise time of sale, adding a dollar to the net value of the home has the same impact on the value of the plan as adding a dollar of liquidity. However, the value of the RRSP asset is less because conversion of RRSP into liquidity is taxed at a rate of m .

What about the implicit prices of assets prior to the sale? For the $[t_1, t_2]$ period, the prices of assets are given by:

$$\gamma_a(t) = \gamma_a(t_2) e^{n(t_2-t)} \quad (35)$$

$$\gamma_\alpha(t) = \gamma_\alpha(t_2) e^{r(t_2-t)} \quad (36)$$

$$\gamma_w(t) = \gamma_w(t_2) e^{r(t_2-t)} \quad (37)$$

As γ_α and γ_w both decrease at the same rate r and $\gamma_\alpha(t_2) = \frac{1}{(1-m)} \gamma_w(t_2)$, we immediately see that $\gamma_\alpha(t) = \frac{1}{(1-m)} \gamma_w(t)$ for $t \in [t_1, t_2]$. The implicit price of the RRSP asset is always in a $(1-m)$ proportion of that of the net value of the home due to the tax treatment of RRSP contributions and withdrawals. As for the price of liquid assets, knowing that $\gamma_a(t_2) = \gamma_\alpha(t_2)$, we see in equation 36 that $\gamma_\alpha(t_2) = \gamma_\alpha(t) e^{-r(t_2-t)}$. By substituting in 35, we find that $\gamma_a(t) = \gamma_\alpha(t) e^{(n-r)(t_2-t)}$. Thus, as long as $n < r$, that is $m > 0$, $\gamma_a(t) < \gamma_\alpha(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. The paths of the implicit prices are indicated in Figure 1. As such, if $\gamma_a(t) < \gamma_\alpha(t)$, the value of the plan is improved by decreasing $a(t)$ to increase $\alpha(t)$. As this is possible if $a(t) > 0$, we are faced with a contradiction: the hypothesis that the constraint of non-negativity on liquidity is non-binding is not compatible with an optimal plan if

contributions rights to RRSP are unused. As a result, it is necessary that $a(t) = 0$ if the household has unused contributions. Thus, and this is a relevant result for the rest of the HBP analysis, the household will always be in a situation where $\dot{a}(t) = a(t) = 0$ if there are unused RRSP contributions. When savings are possible, they will be made in the form of RRSP assets and the $\rho(t)$ contribution will be made by resolving equation 24 when $\dot{a}(t) = a(t) = 0$. We will thus have a contribution determined by the equation $0 = y - c(t) - v(t)h - (1 - m)\rho(t)$, which is the same as saying that RRSP contributions will be $\rho(t) = \frac{y - c(t) - v(t)h}{(1 - m)}$.

Let us now examine what happens to the paths of the implicit prices when there is room for savings and $\dot{a}(t) = a(t) = 0$. By means of equation 31, we know that $\gamma_a(t_2) \geq \frac{\partial W}{\partial a(t_2)}$. By combining this with the other conditions of transversality, we obtain $\gamma_a(t_2) \geq \gamma_a(t_2) = \frac{1}{(1 - m)} \gamma_w(t_2)$. However, if there are savings, they must be in RRSP assets, which means that $w(t_2^-)$ is positive. However, if $w(t_2^-) > 0$, we cannot have $\gamma_a(t_2) > \frac{1}{(1 - m)} \gamma_w(t_2)$ because, if liquid assets have an implicitly larger value, adjusted for taxation, than that of the RRSP asset, it is then better to slightly decrease the RRSP asset to add some to the liquid assets. We thus cannot have strict inequality and the prices of the assets at t_2 comply with the double equality $\gamma_a(t_2) = \gamma_a(t_2) = \frac{1}{(1 - m)} \gamma_w(t_2)$.

As regards the value of assets prior to the sale date, the path of the RRSPs implicit price is a parallel evaluation of $\gamma_a(t)$ because both prices decrease at rate r . In the path of the liquid assets' implicit price, we can, through what was demonstrated previously, state that μ will be adjusted to have an identical path to that of the implicit price of the home's net value. If not, it would be possible to improve the plan by reallocating assets to increase the retention of liquid assets and the plan would no longer be optimal.

Figure 2 indicates the situation when $\mu > 0$ and when there is room for savings in the model. We can see that the $\mu > 0$ relationship is such that the path of the liquid assets' implicit price is adjusted to that of the net value of the home. Obviously, if $U_t e^{-\rho t} = \gamma_a$, this means that the consumption path will be changed to ensure a decrease in the implicit price of the liquid asset at a rate of r . The case where liquidities are tight and there are no savings by the household is of slight interest to us at this time, as we will also have $\dot{a}(t) = a(t) = 0$.

In brief, faced with an RRSP, the relevant rate for accumulation of savings by the household and for the choice of a consumption path is no longer n as it is when the RRSP asset is not integrated into the model, but instead becomes r , the gross real interest rate. Note that this permits us to simplify the model somewhat. Thus, in the model without RRSPs, it was important to distinguish between a case where $s < t_2$ and a case where $s \geq t_2$ because the relevant accumulation rate was r until the mortgage was amortized and then became n . As such, there is no longer any reason to make such a distinction because the household can save in RRSPs. In the next section, we will simplify the presentation of the model by assuming that $s = t_2$, which will permit us to lighten the presentation without sacrificing its generality. Note that this will result in $\alpha(t_2) = Ph$.

4.3 Model With RRSP Assets and HBP

4.3.1 Description of the Model With RRSP Assets and HBP

It is important here to briefly review the HBP mechanism to show the difference between this model and the model with only an RRSP. The HBP permits a tax-free amount to be withdrawn from the participant's RRSP to be allocated to the net value of the home, insofar as the participant makes yearly repayments under the HBP. To simplify the matter, we will assume that the HBP repayment period corresponds to that of the mortgage amortization s that, in turn, corresponds to the date on which the home is sold. We will also not allow the participant to choose to not to make the repayments and to instead pay the tax on the default payments.⁶ Finally, we will limit our analysis to cases in which there are unused contributions.

With these hypotheses, the differences between this model and the model examined in the previous section are as follows. First, because the HBP allows participants to withdraw amounts from their RRSPs without penalty, this changes the initial condition of the RRSP asset, which becomes $w(t_1) = w(t_1^-) - s\theta$, where $s\theta$ is the amount withdrawn under the HBP and θ is the periodic repayment. As this amount reduces what must be taken from liquid assets to make the down payment when purchasing the home, the initial condition of liquid assets becomes $a(t_1) = a(t_1^-) - (Ph - D(t_1) - s\theta)$.⁷ The last two changes are the result of RRSP

⁶ Although interesting, this possibility complicates the model and we were not able to study its implications.

⁷ Note that $D(t_1)$ is not necessarily identical to that of the previous problem.

repayments. Thus, the $\dot{a}(t)$ equation becomes $\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t) - \theta$, while the $\dot{w}(t)$ equation will be $\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t) + \theta$. The rest of the model is similar to that without RRSP assets as seen in the previous section, including the hypotheses that were developed. It is therefore not necessary to repeat them. The overall model is thus:

$$\max_{c(t), h(t)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta t} U(c(t), h) dt + V(a(t_2) + \alpha(t_2) + (1-m)w(t_2), t_2)$$

subject to:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t) - \theta \\ \dot{w}(t) &= rw(t) + \rho(t) + \theta \\ \dot{\alpha}(t) &= r\alpha(t) + v(t)h - rPh \\ a(t_1) &= a(t_1^-) - (Ph - D(t_1) - s\theta) \\ w(t_1) &= w(t_1^-) - s\theta \\ \alpha(t_1) &= Ph - D(t_1) \\ a(t) &\geq 0 \\ a(t_1), w(t_2), \alpha(t_2) \text{ and } t_2 &\text{ free} \end{aligned}$$

The Hamiltonian function associated with this problem and the necessary conditions are somewhat modified to become:

$$\max_{c(t), h(t)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta t} U(c(t), h) dt + V(a(t_2) + (1-m)w(t_2), t_2)$$

$$U_c e^{-\delta t} = \gamma_a \quad (38)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_a [v(t) - n \frac{d\alpha(t)}{dt}] + \gamma_w [rP - r \frac{dw(t)}{dt} - v(t)]) dt \quad (39)$$

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t) - \theta \quad (40)$$

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (41)$$

$$\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t) + \theta \quad (42)$$

$$\dot{\gamma}_a + n\gamma_a = -\mu \quad (43)$$

$$\dot{\gamma}_w + r\gamma_w = 0 \quad (44)$$

$$\dot{\gamma}_w + r\gamma_w = 0 \quad (45)$$

$$\mu a = 0, \quad \mu \geq 0, \quad a \geq 0 \quad (46)$$

$$a(t_2)[\gamma_a(t_2) - \frac{\partial V}{\partial a(t_2)}] = 0, \quad a(t_2) \geq 0, \quad \gamma_a(t_2) \geq \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \quad (47)$$

$$\gamma_a(t_2) - \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} = 0 \quad (48)$$

$$\gamma_w(t_2) - \frac{\partial V}{\partial w(t_2)} = 0 \quad (49)$$

$$H(t_2) + \frac{\partial V}{\partial h} = 0 \quad (50)$$

4.3.2 Model Solution

These modifications do not change some properties of the model. Thus, although we will not re-demonstrate it here, it is clear that it is still optimal to contribute to an RRSP when savings are possible so that the relevant interest rate for the rhythm of change to consumption is r rather than n . In this way, we will undoubtedly have a relationship of $\dot{a}(t) = a(t) = 0$. The effect on residential capital demand is studied by analyzing the effect of a change in the HBP amount on the optimal choice of h . In fact, this comes down to studying the wealth gain resulting from the HBP. We will show how this wealth gain is distributed based on two situations, when there are savings and when there are not.

As $\dot{a}(t) = a(t) = 0$, we know from equation 40 that $y = c(t) + v(t)h + (1-m)p(t) + \theta$. To demonstrate the adjustments that must occur, we use a contradiction by assuming that no change takes place in $c(t)$ or in h because of the RAP. But we previously demonstrated that there is a wealth gain associated with the HBP. It thus follows that the HBP will have allowed greater wealth to be accumulated at t_2 . As $a(t) = 0$ and $\alpha(t_2) = Ph$, which has not changed in our hypothesis, this additional wealth must necessarily be in the RRSP. As a result, $w(t_2^-)$ has increased. However, if $w(t_2^-)$ has increased, equation 48 is such that $\gamma_w(t_2)$ must decrease, as $\frac{\partial V}{\partial w(t_2)}$ is concave. As such, if $\gamma_w(t_2)$ diminishes without $\gamma_a(t_2)$ changing, this violates the transversality conditions determining that $\gamma_a(t_2) = \frac{1}{(1-m)} \gamma_w(t_2)$. It does not therefore comply with an optimal plan of not increasing $c(t)$ or h . As such, to re-establish the condition regarding the respective price values for these two assets at t_2 , the savings accumulated in the RRSP must be accompanied by an increased accumulation of wealth in the

residential capital. It is therefore necessary that h increases proportionally to the increased wealth seen in t_2 . The effect of the HBP on housing demand is then positive. We must now verify whether or not this increased wealth, in combination with increased consumption of residential capital, leads to an increase in $c(t)$.

If residential capital consumption h increases, the marginal utility drawn from residential capital consumption will decrease. In other words, according to equation 39, we will see $\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t}$ falling, which suggests that γ_h or γ_a , or both, will decrease. Suppose that it is γ_h that decreases but that γ_a remains the same. At that time, in particular, $\gamma_h(t_2) \neq \gamma_h(t_1)$. However, we have shown that, in cases where households have access to savings, there must be equality between these two implicit prices at t_2 , which contradicts our assumption. Thus, it is easy to see that the only solution in this case is that the two implicit prices decrease together to be equal throughout the entire interval $[t_1, t_2]$. Knowing that the implicit price of the liquid assets is decreasing, we know by equation 38 that the marginal utility drawn by the household from consumption of $c(t)$ must also decrease. This leads to a conclusion that consumption of $c(t)$ increases. In fact, as the relative price of housing services has not changed, the increased consumption of the Hicksian aggregate must be sufficient to maintain constancy in the average ratio of the flows of housing service consumption and the Hicksian aggregate. In short, there will be an increase in housing consumption and demand proportional to the increased wealth at the end of the plan.

Let us pursue the analysis further and examine how the HBP affects mortgage decisions. As $w(t_2^-)$ has increased, but $w(t_1)$ has decreased, the flow of RRSP contributions $\rho(t)$ must be greater in the $[t_1, t_2]$ period than the flow of contributions $\rho(t)$ for the model without the HBP. Indeed, not only must reimbursements θ be made, but also it is necessary to compensate for the interest that would have been earned in the RRSP had the withdrawal not been made. We also know that $c(t)$ and h also increase. As a result, in the constraint $y = c(t) + v(t)h + (1-m)\rho(t) + \theta(t)$, the only element that can be lowered in the right-hand side to ensure that equality is respected is $v(t)$. It is therefore clear, by means of equation 6, that this requires a decrease of $D(t_1)$.

5 CONCLUSION

The purpose of this work was to determine the impact of the HBP on housing demand. We chose to study this based on the framework of a continuous-time life-cycle model. This approach led us to first study the financial benefit of the HBP. We have shown that, based on the hypothesis of an identical interest rate for all assets and debts, a household participating in the HBP benefits from a wealth gain proportional to its taxation rate. This wealth gain is the result of the fact that the HBP consists of receiving an interest-free loan from the government, with the principal equal to the tax to which the RRSP withdrawal would normally have been subject, with a duration which extends the date at which the household must re contribute to the RRSP. The exact value of the loan varies depending on whether or not the household must borrow to make contributions. The gain favours households with higher income, as they have the highest marginal taxation rate.

When the time came to integrate the analysis into the framework of a life-cycle model, we first studied how the HBP changes choices. The main difference is that the possibility of making savings grow at rate r changes the consumption path. By adding the HBP, we then demonstrated that the HBP decreases the initial mortgage loan. In addition, due to the wealth effect associated with the HBP, we see an increase among participants of consumption of housing capital and other non-housing goods. This point is in line with the comment by Thérout (1999), who states that amounts of money that should be systematically invested to secure [the household's retirement] are quite often used to instead purchase a more valuable home. However, the purchase of a more expensive home and increased consumption of composite goods are not an obstacle to accumulating wealth because we show that terminal wealth also increases. Finally, as repayment of RRSP withdrawals is a decision whether or not to save at rate r , there is no reason a household cannot participate in the HBP to benefit from the wealth effect without wishing to save. Households that do not save therefore have no incentive to repay the withdrawal.

One further development of the model that would be interesting would be to make the purchase date endogenous. As Fortin (1988) showed that purchase takes place as soon as the household meets the borrowing criteria, we would expect to demonstrate that the HBP permits an earlier purchase of the home, as it facilitates accumulation of the down payment.

Works Cited

- Akyeampong, Ernest B. "RRSPs in the 1900s." *Perspectives on labour and income*, 12,1, Statistics Canada. (2000): 9-16.
- Artle, Roland and Pravin Varaiya. "Life cycle consumption and homeownership." *Journal of Economic Theory* 18 (1978), pp. 38-58.
- Ascah, Louis. *Les Secret\$ de la preparation financière à la retraite*. Les Éditions du CRP, 1996.
- Boadway, Robin W. and Harry M. Kitchen. *Canadian Tax Policy; Canadian Tax Paper* 103, 3rd ed. Toronto, 1999.
- Clayton, F. A. "Income Taxes and Subsidies to Homowners and Renters: A Comparison of U.S. and Canadian Experience." *Canadian Tax Journal* 22 (1974), pp. 295-305.
- DeMont, Philip. "Interest rates are at an all-time low. Now's the time for home buyers to consider them [sic] options." *Canadian House and Home* 19, 6 (1997): 56-68.
- Fortin, Mario. "Une comparaison des taux d'imposition implicites des services du logement locatif et du logement occupé par son propriétaire." *L'actualité économique* 67, 1 (1991): 37-57.
- Fortin, Mario. *Inflation, taxes, liquidity constraints and the demand for housing*. Université de Sherbrooke, Economics Department, Collection 98-02, 1989.
- Fortin, Mario. "L'inflation, la fiscalité et la demande de logement occupé par son propriétaire : un modèle d'intégration." Doctoral Thesis. Université Laval, (1988).
- Fortin, Mario and André Leclerc. *Long-term outlook on the demand for mortgages in Canada*. Report prepared for CMHC, 2000.
- Frenken, Hubert. "The RRSP Home Buyers' Plan." *Perspectives on labour and income* 10,2. Statistics Canada (1998): 41-44.

- Kamien Morton I. and Nancy Schwartz. *Dynamic Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. New York, 1981.
- Kearl, J. R. "Inflation, Mortgages and Housing." *Journal of Political Economy* 87 (1979), pp. 1115-1138.
- Manouchehri, Ali. "Le Régime d'accession à la propriété a aidé plus de 110 000 personnes en 1998." *Tendances du Marché Hypothécaire*. CMHC (1999), pp. 10-11.
- Canada Customs and Revenue Agency. *Home Buyers' Plan (HBP) – For 1998 Participants*. 1998.
- Shelton, John P. "The cost of renting versus owning a home." *Land Economic Review* 44 (1968), pp. 59-72.
- Statistics Canada. *Spending patterns in Canada*. Catalogue No. 62-202-XIE. Ottawa, 2000.
- Théroux, Pierre. "Régime d'accession à la propriété (RAP) : plusieurs questions à se poser avant de rapper." *Les Affaires, Cahier special : Les REÉR* (Saturday, February 13, 1999), p. B23.
- Thomas Yaccato, Joanne. "Where should the money go? The homeowner's tax-time dilemma. What to pay first: RRSP or mortgage?" *Chatelaine* 70 2 (1997), 28.
- Wheaton, William C. "Life Cycle Theory, Inflation and the Demand for Housing." *Journal of Urban Economics* 18 (1985), pp. 161-179.

APPENDIX 1: DEMONSTRATION OF THE HBP GAIN

Calculation of the Gain with HBP Repayment and No Loan

Let us begin by examining what happens as regards the accumulation of the three assets when a household does not use the HBP. Initially, we have a wealth of $R = a + (Ph - D) + w(1-m)$, where R is wealth, a represents liquidity, $Ph - D$ is the net value of the home, m is the household's personal taxation rate and w is the RRSP asset.

The accumulation of liquid assets capitalized at a rate of n over k years is expressed by $a(1 + n)^k$. The mortgage debt D is capitalized at rate r . Thus, the net value after k years is expressed by $Ph - D(1 + r)^k$. The RRSP asset, also capitalized at rate r , is worth $w(1 + r)^k$ after k years. These formulae are well-known in the field of financial analysis. The household's wealth after k years, without use of the HBP, will thus be $R = a(1 + n)^k + Ph - D(1 + r)^k + (1-m)w(1 + r)^k$.

Next, let us see what accumulation occurs in the three assets when the HBP is used. Initially, we have a wealth of $R^* = a + (Ph - D + k\theta) + (w - k\theta)$, where R^* is wealth, a is liquidity, $Ph - D$ is the net value of the home, $k\theta$ is the amount withdrawn under the HBP such that θ is the required repayment and w is the RRSP asset.

Accumulation of liquid assets after:

One year: $a(1 + n) - \theta$

Two years: $a(1 + n)^2 - \theta(n + 2)$

Three years: $a(1 + n)^3 - \theta(n^2 + 3n + 3)$

Four years: $a(1 + n)^4 - \theta(n^3 + 4n^2 + 6n + 4)$

We can see a general pattern developing. The term assigned to θ in the equations, stemming from the HBP repayments, can be simplified with the equivalent term $\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$, which is the formula for an annuity capitalized at rate n over k years. If we continue the calculations, we will see that, over k years, the accumulation of liquid assets will be obtained by $a(1 + n)^k - \theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$.

Net value of the home after:

One year: $Ph - (D - k\theta)(1 + r)$

Two years: $Ph - (D - k\theta)(1 + r)^2$

Three years: $Ph - (D - k\theta)(1 + r)^3$

It is easy to see that, generally, we will have $Ph - (D - k\theta)(1 + r)^k$

Accumulation of RRSP assets after:

One year: $(w - k\theta)(1 + r) + \theta$

Two years: $(w - k\theta)(1 + r)^2 + \theta(r + 2)$

Three years: $(w - k\theta)(1 + r)^3 + \theta(r^2 + 3r + 3)$

We see, similar to what we have seen previously, that the term assigned to θ can be reduced to $\theta \left[\frac{(1+r)^t - 1}{r} \right]$, such that the general pattern of RRSP asset accumulation is obtained by:

$$(1 - m)[(w - k\theta)(1 + r)^k + \theta \left[\frac{(1+r)^t - 1}{r} \right]]$$

Thus, total wealth when using the HBP will be expressed by:

$$R^* = a(1 + n)^k - \theta \left[\frac{(1+n)^t - 1}{n} \right] + Ph - (D - k\theta)(1 + r)^k + (1 - m)(w - k\theta)(1 + r)^k + \theta \left[\frac{(1+r)^t - 1}{r} \right](1 - m)$$

We therefore need only see if $R^* - R > 0$ to find that, in this case, the HBP results in a wealth gain compared to a situation in which a household does not participate. Thus:

$$\frac{R^* - R}{\theta} = \left[\frac{(1+r)^t - 1}{r} \right] - m \left[\frac{(1+n)^t - 1}{n} \right] + km(1 + r)^k - \left[\frac{(1+n)^t - 1}{n} \right]$$

Thus, if $m = 0$, the two centre elements of the right-side are zero. Furthermore, in such a case, $n = r$, such that the first and last part cancel each other out. Thus $R^* = R$ if $m = 0$. If $m > 0$, this implies that $r > n$. By means of combinatorial analysis, we then see that $\frac{(1+r)^t - 1}{r} > \frac{(1+n)^t - 1}{n}$ and that $km(1 + r)^k > m \left[\frac{(1+n)^t - 1}{n} \right]$. Thus, $R^* - R > 0$ if the taxation rate is positive and the household experiences a gain from using the HBP compared to the alternative situation. Demonstration of the other situations is done in a similar manner.

Calculation of Gain Without HBP Repayment and Without Borrowing

When a household decides to participate in the HBP but does not make the repayments required under the HBP, the accumulation equations are changed. Note first that the equations for a situation in which a household decides not to participate in the program remain unchanged, identical to the previous demonstration. It is thus at the HBP participation level that equations will change.

According to the terms of the HBP, the household must make annual repayments. If these repayments are not made, the amounts are taxed, as they are then considered income. Let us look at what not making the repayments changes in the accumulation equations for the three assets in question.

Accumulation of liquid assets after:

One year: $a(1+n) - m\theta$

Two years: $[a(1+n) - m\theta](1+n) - m\theta = a(1+n)^2 - m\theta(n+2)$

Three years: $[a(1+n)^2 - m\theta](n+2)(1+n) - m\theta = a(1+n)^3 - m\theta(n^2 + 3n + 3)$

In general, after k years, we see $a(1+n)^k - m\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$.

Accumulation of the net value of the home is obtained by $Ph - (D - k\theta)(1+r)^k$, as with the previous demonstration.

Accumulation of RRSP assets is as follows: $(1-m)(w - k\theta)(1+r)^k$. Thus, wealth after k years as a result of having used the HBP will be:

$$R^* = a(1+n)^k - m\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right] + Ph - (D - k\theta)(1+r)^k + (1-m)(w - k\theta)(1+r)^k$$

We already know that, according to the previous demonstration, wealth when the household does not use the HBP is $R = a(1+n)^k + Ph - D(1+r)^k + (1-m)w(1+r)^k$, such that, by differentiating between R^* and R , we obtain:

$$R^* - R = m\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right] + k\theta(1+r)^k - (1-m)k\theta(1+r)^k$$

$$\frac{R^* - R}{\theta} = -m \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right] + k(1+r)^k - (1-m)k(1+r)^k$$

After simplification, this expression becomes:

$$\frac{R^* - R}{\theta n} = k(1+r)^k - \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$$

and we know that this difference is positive, which completes this portion of the demonstration. The reader may use the same procedure to prove the gain with HBP repayment and with a loan to make the initial withdrawal.

Calculation of Gain With HBP Repayment and Loans

Finally, we will demonstrate that there is a gain even if the household makes HBP repayments and, to do so, must borrow the repayment amount at rate r . Suppose, furthermore, that the household does not initially have liquidity. Note that accumulation of α and w is similar to what we saw previously, in that, after k years, we will have $(1-m)(w-k\theta)(1+r)^k + \theta \frac{(1+r)^k - 1}{r}$ for w and $Ph - (D-k\theta)(1+r)^k$ for α . The difference is in the accumulation of a . In effect, after one year, the household must borrow θ to make the first contribution. After two years, the household owes θ plus the interest on that amount, and must again borrow θ to make the second RRSP contribution. This means that $-\theta(1+r) - \theta = -\theta(r+2)$. After three years, the household owes $\theta(r+2)$ plus the interest on this amount, and must again borrow θ , which, after three years, gives an equation of $-\theta(r+2)(r+1) - \theta = -\theta(r^2 + 3r + 3)$. In general, we would have the following equation after k years: $-\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right]$.

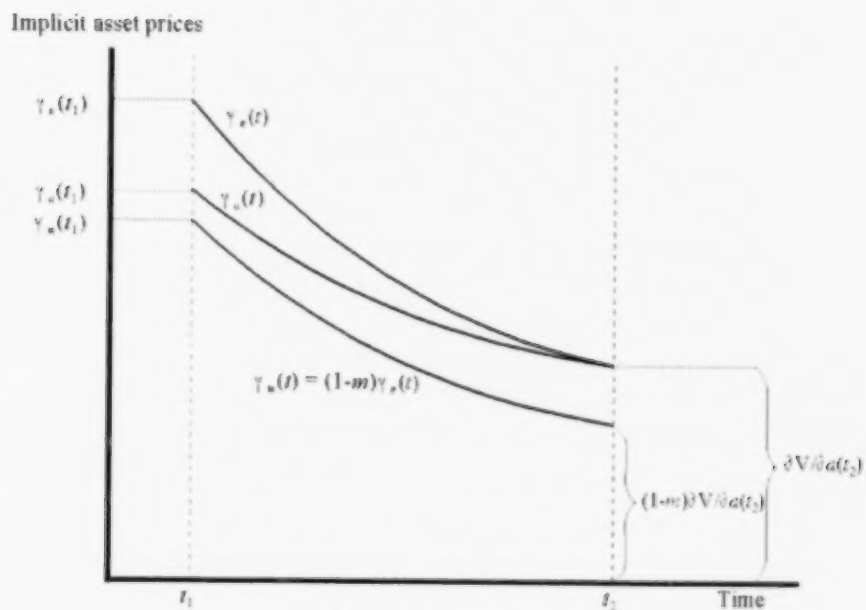
As with the two previous demonstrations, we need only demonstrate that $R^* - R > 0$. Thus,

$$R^* - R = -\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] + Ph - (D - k\theta)(1+r)^k + (1-m)(w - k\theta)(1+r)^k + \theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] - Ph + D(1+r)^k - (1-m)w(1+r)^k, \text{ which is equivalent to the expression } R^* - R = mk\theta(1+r)^k > 0.$$

This therefore proves that there is a gain, even in this situation. This gain is equivalent to the amount initially withdrawn from the RRSP, multiplied by the taxation rate and capitalized over k years at rate r .

APPENDIX 2: FIGURES

Implicit Prices when $a(t) > 0$



Implicit Prices when $a(t) = 0$

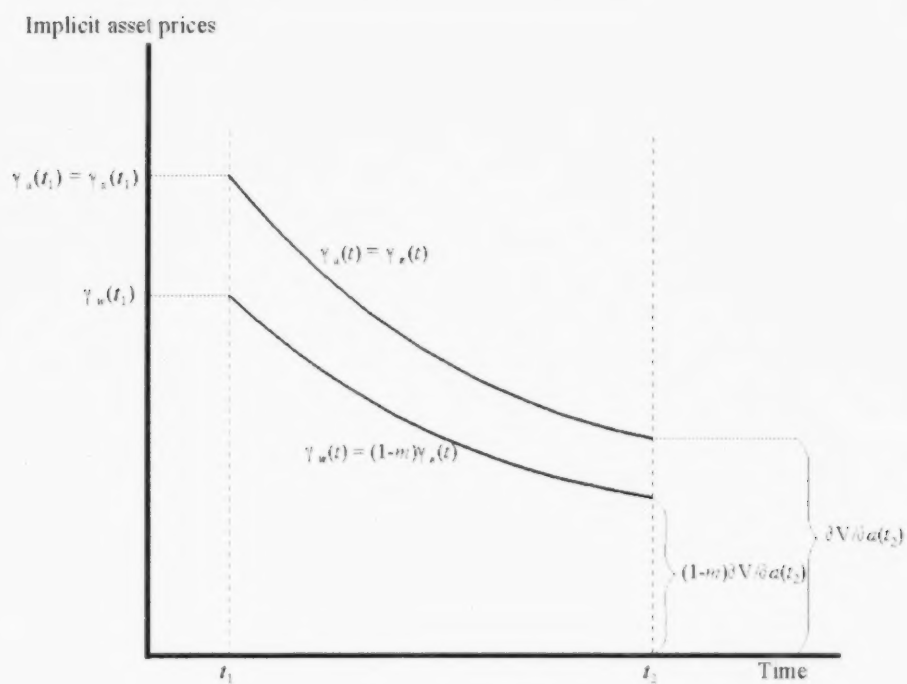


Figure 2

APPENDIX 3: LIST OF SYMBOLS

- i : Nominal interest rate on liquid assets, RRSP assets and the mortgage debt
- m : Marginal income taxation rate
- π : Inflation rate
- r : Real gross interest rate (before taxes)
- n : Real net interest rate (after taxes)
- a : Real value of liquid assets
- w : Real value of RRSP assets
- P : Real purchase price of a housing unit
- h : Number of housing units purchased and the flow of housing services used
- D : Real value of mortgage debt
- α : Net value of home
- R : Real wealth of household
- θ : Periodic amount to be recontributed to the RRSP to repay the withdrawal permitted under the HBP
- k : Maximum number of periods authorized for repaying the withdrawal permitted by the HBP
- t_1 : Beginning of plan and date on which the home is purchased
- t_2 : Date on which the home is sold
- T : End of plan
- y : Flow of real income
- c : Rate of instantaneous consumption of the Hicksian aggregate used as numeraire
- δ : Pure rate of time preference
- v : Flow of disbursements necessary to amortize the mortgage debt for a capital unit
- s : Duration of the mortgage amortization plan
- $V(\cdot, t_2)$: Terminal value function, the first argument being the real wealth at t_2
- γ_a : Implicit price of liquid assets
- γ_α : Implicit price of the net value of the home
- γ_w : Implicit price of RRSP assets
- μ : Implicit price of the non-negativity constraint on liquid assets
- ρ : Real value of the RRSP contribution

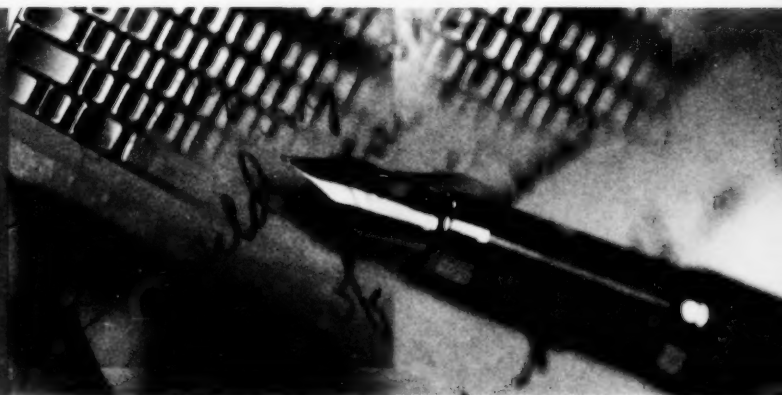
Visit our home page at www.cmhc.ca



RAPPORT DE RECHERCHE

L'IMPACT DU RÉGIME
D'ACCESSION À LA PROPRIÉTÉ
SUR LA DEMANDE DE LOGEMENT

**PROGRAMME DE
SUBVENTIONS
DE RECHERCHE**



AU COEUR DE L'HABITATION
Canada

SCHL—AU CŒUR DE L'HABITATION

La Société canadienne d'hypothèques et de logement (SCHL) est l'organisme fédéral responsable de l'habitation. Elle aide les Canadiens à avoir accès à un vaste choix de logements de qualité, à prix abordable.

Le Programme d'assurance prêt hypothécaire de la SCHL a aidé de nombreux Canadiens à réaliser leur rêve de posséder une maison. La SCHL offre une aide financière pour que les Canadiens les plus démunis puissent se procurer un logement convenable, à prix abordable. Par l'entremise de ses activités de recherche, la SCHL stimule l'innovation dans les domaines suivants: conception des habitations, technologie du bâtiment, urbanisme, options de logement et financement. La SCHL s'associe également avec le secteur de l'habitation et les autres membres d'Équipe Canada afin de vendre les produits et le savoir-faire canadiens sur les marchés étrangers et, ainsi, de créer des emplois ici-même, au pays.

La SCHL offre aux consommateurs et aux membres du secteur de l'habitation une vaste gamme de produits d'information susceptibles de les aider à prendre des décisions éclairées concernant leurs achats ou leurs affaires. Avec la plus vaste gamme d'information sur l'habitation et les logements au Canada, la SCHL est le plus important diffuseur d'information sur l'habitation au pays.

Par ses activités, la SCHL contribue à l'amélioration de la qualité de vie des Canadiens, dans toutes les collectivités du pays. Elle les aide à vivre dans des maisons sûres à tout point de vue. Elle est vraiment «au cœur de l'habitation».

Les Canadiens peuvent se procurer l'information diffusée par la SCHL dans différents points de vente et dans ses bureaux régionaux.

Vous pouvez aussi communiquer avec nous par téléphone : 1 800 668-2642
(à l'extérieur du Canada : (613) 748-2003)
ou par télécopieur : 1 800 245-9274
(à l'extérieur du Canada : (613) 748-2016)

Pour nous joindre en direct, visitez notre page d'accueil à l'adresse suivante : www.schl.ca

La Société canadienne d'hypothèques et de logement souscrit à la politique du gouvernement fédéral sur l'accès des personnes handicapées à l'information. Si vous désirez obtenir la présente publication sur des supports de substitution, composez le 1 800 668-2642.

L'impact du regime d'accesion à la propriété sur la demande de logement

Frédéric Chartrand et Mario Fortin
Département d'économie
Université de Sherbrooke

13 juin 2003

Ce project a été réalisé (ou: réalisé en partie) grâce au soutien financier de la Société canadienne d'hypothèques et de logement (SCHL) dans le cadre de son Programme de subventions de recherche, les idées exprimées étant toutefois celles de l'auteur (ou: des auteurs) et non la position officielle de la SCHL.

L'impact du régime d'accèsion à la propriété sur la demande de logement

Frédéric Chartrand et Mario Fortin*

Département d'économique
Université de Sherbrooke

13 juin 2003

Résumé

Nous étudions l'effet du Régime d'accèsion à la propriété (RAP) sur la demande de logement. L'étude est théorique et basée sur un modèle de cycle vital en temps continu dans lequel le ménage retire de la satisfaction de la consommation d'un bien composite et des services du logement. L'analyse procède par étape. Dans un premier temps, nous intégrons le Régimes enregistré d'épargne retraite (REÉR) dans le modèle de cycle vital. Un résultat intéressant est que, sous l'hypothèse que les revenus du ménage sont imposés à un taux constant pendant toute la vie, le taux pertinent pour l'accumulation de l'épargne devient le taux d'intérêt réel net lorsqu'il y a des cotisations inutilisées au REÉR. Ensuite, nous montrons que les retraits du REÉR permis par le RAP procurent un gain de richesse qui croît en fonction du taux d'imposition et qui demeure même pour les ménages qui doivent emprunter pour cotiser au REÉR et qui ne remboursent pas le REÉR. L'impact du gain de richesse se répartit sur la consommation du bien composite, celle du logement ainsi que sur la richesse terminale dans la même proportion. L'effet sur la demande de logement est donc toujours positif. En plus, le ménage va réduire son endettement initial.

Mots clés : Demande de logement, cycle de vie.

* Cette recherche a été rendue possible grâce au support financier de la Société canadienne d'hypothèques et de logement dans le cadre du Programme des subventions de recherche. Nous tenons à la remercier, ainsi que Ian Melzer et les participants à la session d'économie urbaine et régionale du congrès 2002 de l'Association canadienne d'économie pour leurs commentaires et suggestions.

Table des matières

1	INTRODUCTION	3
2	CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE	4
2.1	Le Régime d'accèsion à la propriété	4
2.2	Problématique du RAP et des REÉR par rapport à la demande de logement	6
2.3	Les facteurs importants de la décision d'achat d'un logement . . .	7
3	L'IMPACT DU RAP SUR LA RICHESSE	9
3.1	Hypothèses et définition de la richesse	9
3.2	Impact du RAP sur la richesse	10
4	INFLUENCE DU RAP SUR LA DEMANDE DE LOGEMENT	14
4.1	Variables et hypothèses du modèle de base sans REÉR	14
4.2	Modèle avec actif REÉR	17
4.3	Modèle avec actif REÉR et RAP	22
4.3.1	Description du modèle avec actif REÉR et RAP	22
4.3.2	Solution du modèle	24
5	CONCLUSION	26

1 INTRODUCTION

L'achat d'un logement constitue un achat très important auquel les propriétaires occupants consacraient en moyenne 19,6% de leur budget en 1997 (Statistique Canada, 2000). Son importance est telle que la demande de logement a pris une place particulière dans la théorie du cycle vital de la consommation (Artle et Varaiya, 1978). Cependant, en raison des diverses contraintes encourues et des multiples éléments du coût de la propriété résidentielle, la décision d'acheter un logement s'est révélée complexe à modéliser. Le ménage doit prendre en compte la richesse sur toute sa vie, sa capacité à assumer les déboursés courants, le prix de la location d'une résidence, le coût implicite des fonds propres investis dans la résidence et les contraintes à l'emprunt. Ces dernières limitent en effet la valeur de l'emprunt hypothécaire en fonction de la mise de fonds et de la capacité de remboursement du ménage.

En raison de l'importance sociale et économique de l'accès au logement, les gouvernements interviennent de diverses manières dans le secteur. La décision d'achat du ménage est donc aussi influencée par les avantages fiscaux qui sont offerts. Comme la littérature théorique s'est surtout développée aux États-Unis, on trouve peu d'articles qui étudient les particularités de la fiscalité canadienne. Les ajustements à faire se situent tout d'abord au niveau de la déductibilité des intérêts hypothécaires ainsi que des taxes foncières du revenu imposable. Aux États-Unis, ces deux dépenses sont déductibles, sauf pour les ménages qui réclament la déduction forfaitaire, alors qu'ils ne le sont pas au Canada. Par contre, le gain en capital réalisé sur la résidence principale n'est jamais imposable au Canada alors qu'il peut l'être aux États-Unis. Ces particularités canadiennes ont été intégrées dans la théorie de la demande de logement dans Fortin (1988). Cependant, d'autres différences existent dont deux retiennent notre attention dans le présent document. Tout d'abord, l'impact du Régime enregistré d'épargne retraite (REÉR) n'a jamais été intégré dans la théorie du cycle de vie. À fortiori, son impact sur la demande de logement n'a pas non plus été étudié. Ensuite, l'effet du Régime d'accession à la propriété (RAP) sur la demande de logement n'a pas non plus été établi.

Le Régime d'accession à la propriété constitue certainement l'élément le plus novateur adopté dans les dix dernières années par le gouvernement canadien afin de modifier les modalités de financement du logement. Le RAP veut rendre le logement plus abordable en facilitant l'accès aux montants que doit réunir un ménage pour couvrir la mise de fonds initiale. Sommairement, le RAP permet de retirer des REÉR jusqu'à concurrence de 20 000\$ sans encourir de pénalités si ce retrait est utilisé pour couvrir le versement initial de la résidence. Ce retrait doit être remboursé par une série de versements annuels d'une valeur minimale égale à 1/15 du montant retiré pendant une durée maximale de 15 ans. À défaut d'effectuer le remboursement requis, le ménage doit ajouter à son revenu imposable le montant en défaut.

Cette mesure fiscale est très populaire. Entre son entrée en vigueur, en février 1992, et 1998 le RAP a permis à plus de 777 000 personnes de retirer près de 7,5 milliards de dollars de leur REÉR afin de financer l'achat d'une

première résidence (Manouchehri, 1999). Cependant, personne n'a encore développé une argumentation ferme ou une modélisation adéquate des avantages et inconvénients du RAP. Cette question est d'autant plus importante que le comportement des participants au régime est très varié. Ainsi, en dépit de la popularité grandissante du RAP, on remarque qu'une forte proportion des participants ne recotisent pas dans leur REÉR selon les termes du RAP. Le Régime d'accèsion à la propriété pose donc d'excellentes questions : Le programme peut-il être désavantageux sur le plan financier pour certains ménages ? L'ajout du RAP permet-il une consommation accrue du capital résidentiel ? La possibilité de retirer de façon anticipée en franchise d'impôt des sommes déjà cotisées constitue-t-elle un avantage susceptible d'attirer même les ménages fortunés qui ne sont pas soumis à une contrainte serrée sur leur emprunt ? Quels sont les ménages les plus avantagés par le programme ?

Le but de ce document est d'analyser l'impact du RAP sur la demande de logement. L'analyse est théorique et fait appel au modèle de demande de logement basé sur l'analyse de cycle de vie en temps continu. Ce modèle fut appliqué à la demande de logement par Artle et Varaiya (1978) et a été utilisé maintes fois depuis, entre autres par Wheaton (1985) aux États-Unis et par Fortin (1988) au Canada. Sommairement, l'étude veut vérifier de quelle façon le RAP influence la demande de logement. Le travail est structuré de la façon suivante. Dans la prochaine section, nous cernons le contexte et la problématique des REÉR et du RAP, pour ensuite voir les facteurs importants qui interviennent dans la décision d'achat d'un logement. À la section 3, nous traitons le gain de richesse découlant de l'utilisation du RAP. Dans la quatrième section nous développons un modèle de cycle vital en temps continu afin de voir l'effet du RAP sur certaines variables du modèle. Nous concluons dans une dernière section.

2 CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

2.1 Le Régime d'accèsion à la propriété

L'achat d'une résidence constitue un investissement majeur, surtout pour les jeunes ménages qui ont souvent de la difficulté à obtenir le financement nécessaire pour couvrir la mise de fond initiale. Le RAP est un outil conçu pour réduire cet obstacle à l'achat. De façon générale, le RAP permet à un ménage n'ayant jamais été propriétaire de retirer de son REÉR jusqu'à 20 000\$ dans le but d'acheter ou de construire une habitation admissible, sans inclure dans son revenu imposable les retraits qui remplissent les conditions d'admissibilité au RAP.¹ Le remboursement des montants retirés des REÉR peut s'échelonner au maximum sur 15 ans, le remboursement minimal annuel étant égal au montant initialement retiré divisé par 15. Si le remboursement annuel est inférieur à ce minimum, la somme manquante est ajoutée au revenu imposable de l'année où le remboursement aurait dû s'effectuer. Depuis 1999, les conditions d'accès ont

¹ Pour les diverses conditions d'admissibilité, le lecteur peut consulter *Régime d'accèsion à la propriété (RAP) - Participants pour 1998* (1998).

été élargies pour inclure également les anciens propriétaires à la condition qu'ils n'aient pas possédé de maison depuis cinq ans.

La popularité de ce programme est très grande. Pour l'année 1998 seulement, "le Régime d'accèsion à la propriété du gouvernement fédéral a aidé plus de 110 000 personnes à réaliser leur rêve d'accéder à la propriété. Collectivement ces personnes ont retiré plus de 1,1 milliard de leurs REÉR pour acheter une maison" (Manouchehri, 1999 p.10), ce qui, comme le montre le tableau 1.1, est semblable à l'utilisation observée les années antérieures.

Tableau 1.1
Participation au RAP²

Période couverte	Participants	Retraits en millions de \$
Du 26/02/1992 au 1/03/1993	159 000	1 536
Du 2/03/1993 au 1/03/1994	102 000	1 011
Du 2/03/1994 au 31/12/1994	56 000	455
Du 1/01/1995 au 31/12/1995	79 000	718
Du 1/01/1996 au 31/12/1996	119 000	1 136
Du 1/01/1997 au 31/12/1997	132 000	1 306

Le RAP n'est cependant pas sans problème. En effet, en 1995, un tiers des 230 000 contribuables tenus à un remboursement ont omis de le faire. Comme les versements manquants sont traités comme des retraits imposables du REÉR, 76 000 contribuables ont été tenus de payer un impôt sur ces montants (Frenken, 1998). Nous verrons dans un chapitre ultérieur qu'en fait, il est peu coûteux de ne pas effectuer le remboursement. Par ailleurs, comme le montre le tableau 1.2, la distribution provinciale des participants au RAP reproduit à peu de choses près les parts de population des provinces. Cependant, les montants moyens retirés varient grandement d'une province à l'autre. Ainsi, le retrait moyen variait entre 6 824\$ en Nouvelle Écosse et 11 511\$ au Québec. À première vue, la valeur du retrait moyen ne semble pas reliée au revenu par habitant ou à la valeur moyenne des logements.

²Source : Frenken (1998), « Régime d'accèsion à la propriété », *L'emploi et le revenu en perspective* 19(2), Statistique Canada, p.41.

Tableau 1.2
Répartition provinciale de la participation au RAP en 1998³

Province	Nombre de participants	Retrait moyen en \$
Terre Neuve	886	7 344
Ile du Prince Édouard	236	7 501
Nouvelle Écosse	1 929	7 228
Nouveau Brunswick	1 227	6 824
Québec	33 658	11 511
Ontario	45 550	9 533
Manitoba	2 640	6 983
Saskatchewan	1 975	6 585
Alberta	11 063	7 808
Colombie Britannique	11 669	9 344
T. N. O.	117	10 572
Yukon	113	8 642
Total	111 063	9 376

2.2 Problématique du RAP et des REÉR par rapport à la demande de logement

Avant d'étudier de façon théorique le RAP dans un cadre de cycle vital, il est primordial de situer le contexte des REÉR vis-à-vis la demande de logement. Au Canada, les Régimes de pension agréés (RPA) et les REÉR ont été créés pour rencontrer certains objectifs sociaux et économiques.

The main social goal is to provide an adequate level of income for people upon retirement (and also to reduce government expenditure for this purpose). In addition, the RRSP scheme allows individuals to average their income over their lifetimes. The economic objective is to encourage savings, and thus to increase the supply of funds available for investment (Boadway et Kitchen (1999), p.120).

Comme les REÉR permettent au cotisant de reporter l'impôt sur la cotisation et sur les rendements jusqu'au moment du retrait du régime, les cotisants sont fort nombreux, surtout parmi les plus fortunés. En effet, pour l'année 1992, les contribuables au REÉR ayant un niveau de revenu de 40 000\$ et plus, ne représentant pourtant que 26% des contribuables, ont effectué 63,3% des cotisations. Ceux gagnant moins de 25 000\$, soit 45,4% des contribuables, n'ont pour leur part contribué qu'à 11,5% des cotisations (Ascali, 1996).

L'achat d'un premier logement se fait habituellement à un âge où les ménages ne disposent pas de beaucoup de fonds propres. La faible richesse financière des jeunes ménages constitue souvent le principal obstacle à l'achat et le RAP se voit comme une façon d'amoindrir cette difficulté. Cependant, comme les ménages à bas revenu cotisent peu à leurs REÉR, cela limite évidemment les sommes

³Source : Manouchehri (1999), p.11.

qu'ils peuvent retirer des REÉR pour financer l'achat d'un premier logement. Par ailleurs, comme les ménages manifestent le désir de devenir propriétaires assez rapidement dans leur vie, que les revenus des jeunes ménages sont plus bas et qu'ils n'ont pas pu cotiser aussi longtemps que les ménages plus âgés, les sommes que les jeunes ménages peuvent retirer de leur REÉR dans le cadre du RAP sont forcément limitées. Une stratégie que les ménages peuvent utiliser pour contourner cette difficulté consiste à se faire prêter par une institution financière les sommes requises pour cotiser au REÉR et d'effectuer le retrait juste après. Nous étudierons comment cette stratégie s'intègre dans les décisions rationnelles des ménages.

Cependant, une des difficultés que pose l'étude du RAP est que les REÉR n'ont pas été intégrés dans la théorie du cycle vital, et à fortiori, dans celle de la demande de logement. Cette absence de bases théoriques n'empêche pas des spécialistes en finance personnelle d'y aller d'argumentation en faveur ou en défaveur de l'utilisation du RAP et des REÉR lors de l'achat d'une résidence. Avant de développer notre argumentation sur cette question, nous verrons dans la prochaine section les facteurs importants de la décision de devenir propriétaire occupant. Ceci permettra d'identifier quels éléments sont modifiés par le REÉR et le RAP.

2.3 Les facteurs importants de la décision d'achat d'un logement

Plusieurs facteurs interviennent dans la décision d'accéder à la propriété. Le premier est bien entendu le coût des services du logement occupé par son propriétaire par rapport au coût de la location résidentielle car si on peut occuper un logement à moindre coût en l'achetant qu'en le louant, cela incite à devenir propriétaire. Or, la propriété résidentielle ne présente pas un avantage de coût avéré par rapport à la location. En effet, comme le montre Fortin (1991), de nombreux éléments influencent le coût relatif des deux modes d'occupation : le taux d'intérêt réel, le taux d'inflation, l'importance de la dette hypothécaire par rapport au financement par les fonds propres et différents paramètres de la fiscalité (déduction pour coût en capital, taux d'imposition des gains en capital et celui des revenus de placement). Nous ne développons pas longuement tous ces arguments ici mais allons plutôt porter notre attention sur les éléments qui sont modifiés par le REÉR et le RAP.

Les fonds propres investis dans le logement comportent un coût implicite égal au rendement net d'impôt que ces fonds auraient procuré s'ils avaient été investis dans le meilleur placement concurrent. Un ménage qui a des droits de cotisation inutilisés au REÉR peut percevoir un rendement sur ses placements dont l'imposition est reportée jusqu'au moment du retrait du régime. Le rendement auquel renonce le ménage est alors plus élevé que celui sacrifié par le ménage qui a utilisé tous ses droits de cotisation car dans ce dernier cas les revenus de placement sont imposés annuellement. Le coût des services du logement occupé par un propriétaire est donc plus élevé lorsqu'un ménage peut cotiser à un REÉR.

Le revenu total et sa répartition temporelle jouent tous deux dans la décision d'achat. En effet, le revenu total, soit la valeur présente du flux de revenu du ménage pendant toute sa vie, doit être suffisant pour rencontrer les obligations financières globales de la propriété résidentielle. La répartition temporelle du revenu intervient pour sa part car le ménage fait face à deux contraintes à l'emprunt lors de l'achat d'un logement. La contrainte de richesse existe parce que les institutions financières ne peuvent accorder un prêt hypothécaire ordinaire dont le montant excède 75% de la valeur du logement ou un prêt assuré en vertu de la Loi nationale de l'habitation dont le montant excède 95% de la valeur du logement. Concrètement, cela signifie qu'un ménage ne peut acquérir un logement dont le prix excède 20 fois les fonds propres dont il dispose. Ainsi, avant même d'acheter son logement, le ménage doit pouvoir épargner à même son revenu courant les fonds propres exigés par les prêteurs hypothécaires. En plus de cette contrainte de richesse l'emprunt est aussi soumis à une contrainte de revenu car la valeur du prêt ne doit pas être telle que l'emprunteur consacre plus qu'un certain pourcentage de son revenu courant aux frais du logement. Cette deuxième contrainte a pour effet de limiter le montant maximal du prêt selon une formule qui fait intervenir le taux d'intérêt nominal sur l'hypothèque et la durée du plan d'amortissement choisi. Ainsi, un ménage dont les gains sont concentrés vers la fin de sa vie pourrait acheter son logement plus tardivement qu'un ménage ayant un revenu global identique mais qui est reçu plus rapidement.

Artle et Varaiya (1978) furent les premiers à modéliser dans un modèle de cycle vital la décision d'achat d'un important actif non liquide, en l'occurrence un logement résidentiel. Ils montrent que le profil temporel de consommation du ménage subit des distorsions lorsque les contraintes à l'emprunt sont serrées car il y a de l'épargne forcée avant l'achat. L'inflation vient exacerber ces effets. Kearl (1979) fut un des premiers à étudier l'impact des distorsions causées par l'inflation sur les paiements hypothécaires. Sans développer un modèle formel, il note néanmoins que l'inflation gonfle, par des taux nominaux d'intérêts plus élevés, les paiements hypothécaires au début de la période de propriété du logement. La hausse graduelle des prix et des revenus nominaux réduit toutefois progressivement par la suite la valeur réelle de ces déboursés. Dans certains cas, l'inflation peut amener le ménage à reporter l'achat d'une résidence, voire même à y renoncer complètement. De plus, bien que la modélisation explicite du problème du consommateur fasse défaut, Kearl conclut qu'une accélération de l'inflation réduit la valeur du logement que le ménage achètera lorsqu'il est contraint sur ses liquidités. Wheaton (1985) développa le premier un modèle formel pour étudier l'effet de l'inflation. Comme il le note, l'inflation cause trois types de distorsions qui peuvent influencer la décision d'être propriétaire. "Inflation raises mortgage payments through higher interest rates, [it] causes such payments to fall rapidly over time in real terms, and it creates a real growth in housing equity, as borrowed debt is leverage against the inflating value of homes" (Wheaton, 1985 p.161).

Deux effets opposés interviennent. Lorsque la contrainte d'emprunt liée aux revenus d'un ménage est serrée, le montant qu'il peut emprunter diminue au

fur et à mesure que l'inflation anticipée augmente. Par contre, l'accélération fait aussi diminuer le taux de rendement réel net sur les placements du ménage si celui-ci paie de l'impôt sur les revenus de placement, réduisant le coût d'usage des services du logement.⁴ Ainsi, la propriété est fiscalement plus avantageuse au moment où il est plus difficile de faire face aux déboursés mensuels. Fortin (1989) montre à l'aide de simulations que l'impact des distorsions du plan d'amortissement est négligeable lorsque l'inflation est faible mais prend plus d'importance lorsque l'inflation s'accélère. Ainsi, une augmentation du taux d'inflation favorise une augmentation de la demande de logement à bas taux d'inflation mais tend à produire l'effet inverse à taux d'inflation élevé. Notons toutefois que si le rendement des fonds propres n'est pas imposé à chaque année, comme c'est le cas dans un REÉR, l'inflation n'a plus d'impact sur le rendement net des fonds propres. Le seul effet de l'inflation qui demeure est celui de la distorsion du plan d'amortissement. L'inflation ne peut pas alors avoir d'impact positif sur la demande de logement occupé par un contribuable ayant des droits de cotisation inutilisés dans un REÉR.

Avant de procéder à la présentation du modèle de demande de logement, nous étudions dans la prochaine section l'effet du RAP sur la richesse.

3 L'IMPACT DU RAP SUR LA RICHESSE

3.1 Hypothèses et définition de la richesse

Afin de clairement identifier l'avantage pécuniaire potentiel du RAP, nous ferons fi de toute discussion relative à la présence d'une contrainte de liquidité pour voir comment le changement de répartition initial des actifs et des dettes rendu possible par le RAP procure des gains financiers. La première chose évidente est que puisque le RAP consiste à réduire la dette hypothécaire en retirant du REÉR, on peut modifier à volonté l'avantage financier découlant du retrait en postulant un écart entre le taux d'intérêt sur l'hypothèque et celui sur le REÉR. Afin de faire abstraction de ceci, notre analyse suppose un taux d'intérêt nominal i qui est identique sur l'hypothèque et le REÉR. En pratique, en raison de la marge bancaire, il est probable que la situation où le rendement sur le REÉR est supérieur au taux d'intérêt sur l'hypothèque est peu probable si on ne considère que des placements d'un risque comparable à celui de la dette hypothécaire. L'hypothèse que nous faisons consiste donc à négliger cette marge et donne ainsi un avantage aux placements en REÉR par rapport à la situation réelle.

Par ailleurs, on peut aussi donner ou enlever un avantage au REÉR en supposant un taux d'imposition au moment des cotisations différent de celui qui s'appliquera à la date du retrait. Plus précisément, en supposant un taux plus faible (élevé) au moment du retrait que celui prévalant au moment des cotisations, on crée un avantage (désavantage) relatif au placement en REÉR. Il est

⁴Le raisonnement exposé dans ce paragraphe est basé sur l'hypothèse que les taux d'intérêt réels avant impôts demeurent inchangés lorsque l'inflation varie.

très difficile de justifier une hypothèse plutôt que l'autre. On peut par exemple présumer que les retraits seront effectués à un moment où le contribuable ne travaillera plus. Comme le système fiscal est progressif, il serait légitime de croire que les retraits seront moins imposés. Par contre, les prestations de la sécurité de la vieillesse sont assujetties à une disposition de récupération. Si les retraits du REÉR ont pour effet de situer le revenu annuel du ménage à un niveau suffisant pour que cette disposition s'applique, le taux d'imposition effectif des retraits sera nettement supérieur. Afin de faire abstraction de ces situations, nous supposerons un taux d'imposition constant tout au long de la vie.

Enfin, la situation du ménage au moment où il effectue ses cotisations peut varier car il peut ou non avoir besoin d'emprunter pour cotiser. Comme nous négligeons l'effet de la marge bancaire, nous supposerons que le ménage peut emprunter pour cotiser à un taux d'intérêt nominal brut i qui est aussi le taux d'intérêt sur la dette hypothécaire et le taux de rendement sur le REÉR. Nous étudierons les deux situations, soit celle où il emprunte pour cotiser au REÉR et celle où ses cotisations proviennent plutôt de ses actifs liquides. Nous distinguerons aussi la situation où le ménage effectue les remboursements prévus de celle où il ne rembourse pas le REÉR et paie plutôt la pénalité fiscale.

3.2 Impact du RAP sur la richesse

Supposons qu'un ménage dispose initialement d'une richesse telle qu'il n'a pas à emprunter pour cotiser à son REÉR. Sa richesse peut être placée de trois façons, soit dans un actif financier liquide dont la valeur réelle est désignée par a , dans un actif REÉR dont la valeur réelle est notée w ou, finalement, elle peut être investie dans un logement. Le stock de logement est mesuré par h avec un prix unitaire réel P . La valeur réelle du logement possédé est donc Ph duquel on soustrait la valeur réelle de la dette hypothécaire D pour obtenir la valeur nette du logement $\alpha = Ph - D$. Nous faisons l'hypothèse que le revenu du ménage est assujéti à un taux d'imposition marginal constant m . En ayant cotisé w au REÉR, le ménage a donc bénéficié d'une réduction d'impôt de mw de sorte qu'il lui en a coûté seulement $(1 - m)w$ d'actif liquide pour obtenir un REÉR valant w . Réciproquement, comme les retraits du REÉR sont imposables, retirer la totalité du REÉR n'augmenterait l'actif liquide que de $(1 - m)w$. Ainsi, la richesse initiale réelle nette R du ménage est donnée par l'équation (1).

$$R = a + (Ph - D) + (1 - m)w \quad (1)$$

L'équation (1) définit la richesse du ménage s'il n'utilise pas le RAP. Nous supposons que le RAP permet de prendre en franchise d'impôt un montant $k\theta$ dans le REÉR du participant afin de l'imputer à la valeur nette du logement à la condition de recotiser, sans bénéficier de déduction fiscale, le montant retiré en k versements égaux valant chacun θ . Si on note par R^* la richesse initiale d'un ménage qui retire dans le cadre du RAP, celle-ci est égale à la partie de droite de l'équation (2).

$$R^* = a + (Ph - D + k\theta) + (1 - m)(w - k\theta) \quad (2)$$

On obtient l'effet de richesse du RAP par la différence entre R' et R . Cependant, cette différence doit prendre en compte l'impact négatif sur le potentiel d'accumulation découlant de l'obligation soit de recotiser au REÉR sans bénéficier des déductions fiscales ou encore de payer l'impôt sur les remboursements en défaut. À cette fin, nous comparons (1) et (2) après que le REÉR ait été entièrement remboursé ou que les pénalités d'impôt aient été toutes payées. Dans notre raisonnement, nous supposons que le taux d'intérêt nominal brut sur l'actif liquide, sur l'actif REÉR et sur la dette est i . Comme indiqué précédemment, on élimine ainsi la possibilité de créer arbitrairement un avantage à une situation en supposant qu'un actif possède un taux de rendement plus élevé. Comme les revenus en intérêt sur les placements hors REÉR sont imposables, le taux de rendement net sur l'actif liquide est de seulement $(1-m)i$. Avec un taux d'inflation π , le taux de rendement réel net $n = (1-m)i - \pi$. Le taux de rendement réel sur le REÉR et sur la dette hypothécaire est pour sa part $r = i - \pi$. Notons que la différence entre le taux d'intérêt net sur le REÉR et celui sur l'actif liquide est $r - n = mi$, donc proportionnelle au produit du taux d'imposition marginal et du taux d'intérêt nominal.

Prenons d'abord la situation où le ménage ne participe pas au programme et calculons la richesse du ménage après k années. L'actif liquide aura fructifié au taux n , permettant d'accumuler une somme réelle $a(1+n)^k$. Pour sa part, la dette hypothécaire aura fructifié au taux r . La valeur nette du logement après k années sera donc seulement de $Ph - (1+r)^k D$. Pour ce qui est de l'actif REÉR, nous aurons $(1-m)w(1+r)^k$ après les k années puisque le montant retiré du REÉR est imposé lorsque les fonds y sont retirés. Donc, la richesse sans l'utilisation du RAP sera la somme des trois actifs, soit :

$$R = a(1+n)^k + Ph - D(1+r)^k + (1-m)w(1+r)^k \quad (3)$$

Regardons maintenant la situation où le ménage participe au RAP. Suite au retrait initial $k\theta$, le ménage doit déduire de ses liquidités le montant θ à chaque année dès la fin de la première année. Après k années, le ménage aura accumulé sur ses liquidités une somme de $a(1+n)^k - \theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right]$, soit moins que s'il ne participe pas au RAP en raison de l'annuité requise pour effectuer les remboursements (voir l'annexe 1). En contrepartie, la valeur nette du logement aura augmenté plus rapidement car la dette hypothécaire initiale était plus faible. Ainsi, après k années la valeur nette du logement atteint $Ph - (D - k\theta)(1+r)^k$. Quant à l'actif REÉR, il est lui aussi plus faible que sans le retrait, en raison de la perte de rendement cumulée entre le moment du retrait initial et celui du remboursement. Après k années la valeur accumulée atteint $(1-m) \left[(w - k\theta)(1+r)^k + \theta \left(\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right) \right]$. La valeur réelle accumulée après k années d'un ménage participant au RAP est la somme des trois éléments précédents.

soit :

$$R^* = a(1+n)^k - \theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right] + Ph - (D - k\theta)(1+r)^k + (1-m)(w - k\theta)(1+r)^k + \theta(1-m) \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] \quad (4)$$

Pour constater que la participation au RAP procure un gain de richesse, il suffit alors de voir si $R^* - R > 0$, où R^* est la richesse après k années en ayant eu recours au programme. Cette différence est donnée par :

$$\frac{R^* - R}{\theta} = \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] - m \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] + km(1+r)^k - \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right] \quad (5)$$

Or, par analyse des équations, on constate que la différence est nulle si $m = 0$ et devient positive si $m > 0$ (voir annexe 1). L'explication de ce résultat est fort simple. Lorsque le gouvernement accorde au ménage le droit de retirer du REÉR en franchise d'impôt, c'est comme s'il acceptait de prêter au ménage sans intérêt le crédit d'impôt pour cotisation au REÉR. L'importance du gain augmente donc avec le taux d'imposition du ménage (car le "prêt" fait par le gouvernement est plus grand) et avec le taux d'intérêt nominal (car le "prêt" est proportionnel aux revenus nominaux à un taux d'imposition donné). Du point de vue financier, il vaut mieux recotiser le plus tard possible pour profiter du prêt sans intérêt du gouvernement le plus longtemps possible. Ainsi, tous les ménages ayant un taux d'imposition positif retirent un avantage financier à utiliser le RAP, mais ceux qui en retirent les gains les plus importants sont ceux ayant le taux d'imposition le plus élevé, c'est-à-dire les plus hauts revenus. Le RAP n'est donc pas une mesure favorisant la progressivité du régime fiscal.

L'analyse montre par ailleurs que le ménage retire un gain de richesse même en ne remboursant pas les montants prévus et en payant plutôt l'impôt sur les montants non remboursés. En effet, si les remboursements ne sont pas effectués, nous aurons une accumulation de l'actif liquide après k années de $a(1+n)^k - m\theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right]$ alors que celles de l'actif REÉR et de la valeur nette du logement sont données respectivement par $(1-m)(w - k\theta)(1+r)^k$ et par $Ph - (D - k\theta)(1+r)^k$. Encore une fois, si nous effectuons la différence entre la richesse lorsque le RAP est utilisé et lorsqu'il ne l'est pas, nous obtenons $R^* - R = m\theta k(1+r)^k - m\theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right]$ (voir l'annexe 1), une différence qui est positive si $m > 0$: de nouveau le ménage retire un gain de la participation au RAP si ses revenus sont imposables. Notons que le gain est plus faible que dans le cas précédent car le ménage épargne moins dans son REÉR. En contrepartie, comme il ne paie à chaque année que $m\theta$ au lieu de θ il dispose à chaque année de sommes d'argent supplémentaires qui peuvent être affectées aux biens de consommation. La raison pour laquelle une proportion aussi élevée de ménage ne recotise pas au REÉR est sans doute parce que le choix de recotiser ou de payer l'impôt sur les cotisations omises se résume à une décision d'épargner ou non au taux r .

Nous avons également étudié les situations où le ménage effectue les remboursements dans le cadre du RAP mais qu'il doit emprunter à un taux d'intérêt r les montants requis par ces remboursements. Supposons de surcroît que le ménage ne possède pas de liquidité initialement. Notons que l'accumulation de l'actif REÉR et de la valeur nette du logement se fera de façon identique à ce que nous avons vu dans le premier cas puisque rien n'a changé de ce côté. Le changement se situe au niveau de l'actif liquide puisque après k années ce dernier aura diminué de $-\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right]$. Nous sommes en mesure de voir que la différence de richesse $R^* - R = mk\theta(1+r)^k > 0$. Cette dernière expression est fort simple et correspond à la valeur capitalisée au taux r pendant k années du "prêt" du gouvernement. Dans les cas précédents l'expression était plus complexe car on devait prendre en compte que la cotisation initiale et les remboursements au REÉR s'effectuaient ne prélevant dans l'actif liquide dont le taux de rendement net d'impôt est seulement n plutôt que r .

En raison de sa simplicité et du fait qu'elle s'applique à la situation la moins favorable, cette dernière expression se prête bien à l'évaluation approximative de la valeur présente du gain financier des ménages qui participent et du coût du programme pour les gouvernements. En effet, la valeur présente est simplement $mk\theta$. Comme le retrait maximal est de \$20 000, cette valeur présente atteint \$8 000 pour un ménage dont le taux d'imposition marginal est de 40%. Si on applique ce même taux marginal aux 7,5 milliards de \$ qui ont été retirés dans le cadre du RAP entre 1992 et 1998, le programme a donc procuré une aide financière directe des gouvernements aux ménages acheteurs de logement qui a atteint 3 milliards de \$. À ce coût il faut ajouter éventuellement la perte de recette fiscale associée aux remboursements au REÉR qui se sont effectués en puisant dans des liquidités dont le rendement aurait été imposable.

En résumé, le RAP procure un avantage financier à tous les ménages imposés, peu importe qu'ils doivent ou non emprunter pour cotiser au REÉR avant de retirer les sommes, qu'ils empruntent ou non pour effectuer les remboursements, ou encore qu'ils effectuent ou non les remboursements. Ce gain est plus grand pour les ménages les plus imposés et pour ceux qui peuvent cotiser au REÉR et le rembourser sans devoir emprunter. La raison pour laquelle de nombreux participants ne remboursent pas le REÉR selon les modalités prévues est que la décision de rembourser se justifie par le désir d'épargner au taux r . Un ménage qui a emprunté pour cotiser au REÉR à seule fin de pouvoir retirer dans le cadre du RAP n'était pas prêteur initialement. Il emprunte pour profiter de l'avantage fiscal mais décidera probablement de ne pas effectuer le remboursement dans le REÉR et de payer l'impôt sur les remboursements non effectués. Notons finalement que la valeur du gain est croissante avec le taux d'imposition des revenus et le taux d'intérêt nominal. La baisse récente des taux d'intérêt est donc susceptible de rendre moins attrayant le Régime d'accession à la propriété.

4 INFLUENCE DU RAP SUR LA DEMANDE DE LOGEMENT

4.1 Variables et hypothèses du modèle de base sans REÉR

Dans cette section nous intégrons le REÉR et le RAP dans un modèle de cycle vital en temps continu afin de voir les effets possibles de l'ajout du REÉR et du RAP sur la consommation de capital résidentiel. Comme le REÉR n'a jamais été étudié dans un tel modèle, nous développons initialement un modèle de base inspiré de Fortin (1988) dans lequel on ne trouve ni REÉR ni RAP. Nous ajouterons ensuite progressivement les éléments, en premier lieu le REÉR puis le RAP afin de voir comment chacun modifie le choix optimal.

Considérons un ménage qui désire maximiser au temps t_1 la fonctionnelle $\int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta t} U(c(t), h) dt$ plus une certaine fonction de valeur terminale qui dépend de la richesse en t_2 . On considère que t_1 et t_2 sont respectivement les dates d'achat et de vente du logement tandis que δ représente le taux de préférence temporel pur, $c(t)$ désigne le taux de consommation instantané de l'agrégat hicksien qui sert de numéraire et h représente le flux de services retiré du stock de capital résidentiel utilisé à la date t . Dans le modèle, nous considérerons que $h(t)$ est directement proportionnel au stock de capital résidentiel, de sorte qu'il désigne indifféremment le stock de logement ou le flux de services qu'on en retire. La raison pour laquelle nous négligeons l'indice temporel pour h est que nous supposons que cette variable est choisie optimalement par le ménage mais doit demeurer fixe pendant toute la période où il est propriétaire occupant. Ces deux arguments sont posés séparables et la fonction d'utilité est supposée additivement séparable et strictement concave, ce qui implique que le taux marginal de substitution est décroissant mais également que l'utilité marginale de la consommation est positive et décroissante dans chacun des deux arguments.

Les choix de consommation sont limités par des contraintes concernant les ressources totales et le flux de déboursés. Le ménage reçoit un flux de revenu liquide exogène qui est constant en terme réel au taux y . Ce revenu peut être consommé ou épargné. La valeur accumulée des épargnes liquides est notée $a(t)$ et cet actif est capitalisé au taux n , où n est le taux d'intérêt réel net. Le flux de rendement total net que l'actif liquide procure en t est donc donné par $na(t)$ qui s'ajoute au revenu y pour donner le flux de nouvelles disponibilités d'actif liquide. Suivant l'approche développée par Artle et Varaiya (1978) pour étudier l'effet des contraintes de liquidité sur la demande de logement, nous imposons une contrainte de non-négativité sur $a(t)$. Une telle contrainte a pour but d'empêcher le ménage d'emprunter en mettant en gage ses revenus futurs. Étant donné la faible capacité d'emprunt non-garanti des ménages par rapport à la valeur actuelle des revenus futurs, une telle hypothèse est plus conforme aux capacités d'emprunt réellement ouvertes aux ménages.⁵

⁵ Cette affirmation est facile à saisir. Si on permet que l'emprunt soit limité seulement par les ressources financières de toute la vie, cela équivaut à reconnaître qu'un ménage de 25 ans qui prévoit obtenir un revenu réel annuel de \$50 000 pendant 40 ans aurait la possibilité d'emprunter plus de \$857 000 à un taux d'intérêt de 5% sans autre garantie que la promesse

En vue d'établir la variation instantanée des liquidités, il faut tenir compte des déboursés d'actifs liquides. Aux dépenses de consommation, que l'on notera $c(t)$, il faut ajouter celles relatives aux services du logement. Puisque nous considérons la période du plan où le ménage est propriétaire nous avons choisi de ne tenir compte que des frais d'amortissement de l'hypothèque. On néglige donc les autres dépenses relatives aux logements (les coûts d'entretien, les taxes foncières, etc.) puisque leur inclusion n'affecterait pas qualitativement les résultats de l'analyse. Le symbole $v(t)$ désigne la valeur réelle du flux de déboursés hypothécaires pour chaque unité de capital alors que h indique le nombre d'unités de capital résidentiel achetées par le ménage. Comme nous supposons que l'emprunt hypothécaire est amorti par une annuité de durée s ayant une valeur nominale constante, les déboursés hypothécaires réels décroissent en terme réel en raison de l'inflation. Si chaque unité de capital résidentiel a un prix d'achat P , le coût d'acquisition du logement est Ph . Nous supposons que la valeur de l'emprunt hypothécaire initial est $D(t_1)$. L'expression régissant le flux de déboursés hypothécaires au temps t est donc donnée par :

$$\begin{aligned} v(t) &= (r + \pi)D(t_1)e^{-\pi(t-t_1)}(1 - e^{-(r+\pi)(s-t_1)})^{-1} \\ v(t) &= v(t_1)e^{-\pi(t-t_1)} \end{aligned} \quad (6)$$

En soustrayant les déboursés des disponibilités en ressources liquides, nous obtenons une expression concernant le taux de changement de l'actif liquide si $\dot{a}(t)$ est positif qui est :

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h \quad (7)$$

En plus de l'actif liquide, le ménage a la possibilité d'accumuler sa richesse sous la forme de la valeur nette d'un logement dont il est le propriétaire occupant. Cette valeur nette au temps t , notée $\alpha(t)$, est obtenue en retranchant la valeur de la dette hypothécaire résiduelle $D(t)$ du prix d'actif du logement Ph , soit $\alpha(t) = Ph - D(t)$, ou encore $D(t) = Ph - \alpha(t)$. Si l'on suppose que des intérêts sont retenus sur la valeur de la dette résiduelle au taux r , c'est-à-dire le taux d'intérêt réel brut, alors la relation suivante doit être vérifiée :

$$rD(t) = r(Ph - \alpha(t)) = rPh - r\alpha(t) \quad (8)$$

Le taux de changement de la valeur réelle nette du logement sera simplement donné par la négative du résultat précédent auquel nous ajoutons la valeur du remboursement hypothécaire $v(t)h$. Le taux de changement est donc :

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (9)$$

La valeur de cette expression est non-nulle lorsque le ménage est propriétaire occupant. Le taux de rendement implicite de la richesse nette d'un logement est le taux d'intérêt réel brut r , soit le montant économisé sur les frais d'intérêts

de rembourser. Clairement, les prêteurs offrent un crédit non-garanti qui est seulement une faible fraction de ce montant.

de la dette hypothécaire lorsque le ménage rembourse un dollar de cette dette. Nous supposons de plus que $\alpha(t)$ est non liquide et indivisible. Le ménage ne peut donc pas vendre ou louer une partie du logement, ce qu'on peut appeler une hypothèse d'exclusivité mutuelle des modes d'occupation.

Le ménage fait ainsi face à des contraintes lors de l'accumulation de sa richesse. En tenant compte de ces dernières, le ménage doit prendre une décision quant au nombre d'unités de capital h qu'il désire acheter. Notons qu'en raison de la nature non-liquide et indivisible du logement, le seul moyen pour le ménage d'avoir accès à la valeur nette du logement est de le vendre. La date t_2 correspond au moment de la vente du logement choisi par le ménage. Ce problème de contrôle optimal peut donc se formuler comme suit :

$$\max_{(c(t), h)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} U(c(t), h) dt + V(a(t_2) + \alpha(t_2), t_2)$$

sujet à

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= na(t) + y - c(t) - v(t)h \\ \dot{\alpha}(t) &= r\alpha(t) + v(t)h - rPh \\ a(t_1) &= a(t_1-) - (Ph - D(t_1)) \\ \alpha(t_1) &= Ph - D(t_1) \\ a(t) &\geq 0, t_1 \leq t \leq t_2 \\ &\quad a(t_2) \text{ libre} \\ &\quad \alpha(t_2) \text{ libre} \\ &\quad t_2 \text{ libre} \end{aligned}$$

et où $V(a(t_2) + \alpha(t_2), t_2)$ est la fonction de valeur terminale. La formulation additive $a(t_2) + \alpha(t_2)$ implique qu'au moment de la vente, le ménage est indifférent quant à la composition de sa richesse. Cette hypothèse se comprend aisément puisqu'immédiatement après la vente, toute la richesse est convertie en actif liquide. Quant à l'expression $a(t_1-)$, elle désigne les liquidités immédiatement avant la date d'achat du logement t_1 .

À ce problème de contrôle optimal on peut associer la fonction hamiltonienne et les conditions nécessaires au problème (voir Kamien et Schwartz, 1981). D'abord pour la fonction hamiltonienne nous avons :

$$H = e^{-\rho t} U(c(t), h) + \gamma_a(na(t) + y - c(t) - v(t)h) + \gamma_\alpha(r\alpha(t) + v(t)h - rPh) + \mu a(t)$$

Quant aux conditions nécessaires pour une solution optimale, elles sont données par :

$$U_c e^{-\rho t} = \gamma_a \quad (10)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\rho t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_a[v(t) - n \frac{da(t_1)}{dh}] + \gamma_\alpha[rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dh} - v(t)]) dt \quad (11)$$

ou

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\rho t} dt = \int_{t_1}^s (\gamma_a[v(t) - n \frac{da(t_1)}{dh}] + \gamma_\alpha[rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dh} - v(t)]) dt + \int_s^{t_2} \gamma_a n P dt \quad (12)$$

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h \quad (13)$$

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (14)$$

$$\dot{\gamma}_a + n\gamma_a = -\mu \quad (15)$$

$$\dot{\gamma}_\alpha + r\gamma_\alpha = 0 \quad (16)$$

$$\mu a = 0, \quad \mu \geq 0, \quad a \geq 0 \quad (17)$$

$$a(t_2)[\gamma_a(t_2) - \partial V / \partial a(t_2-)] = 0, \quad a(t_2) \geq 0, \quad \gamma_a(t_2) \geq \partial V / \partial a(t_2-) \quad (18)$$

$$\gamma_a(t_2) - \partial V / \partial a(t_2-) = 0 \quad (19)$$

$$[H(t_2) + \partial V / \partial t_2][T - t_2] = 0, \quad H(t_2) \geq \partial V / \partial t_2, \quad T \geq t_2 \quad (20)$$

Un problème semblable a été résolu dans Fortin (1988) et nous ne reprendrons pas la solution ici. Soulignons seulement que le taux pertinent pour la détermination du sentier de consommation est le taux r tant que l'hypothèque n'est pas complètement amortie mais devient le taux n si l'hypothèque est amortie avant la vente du logement. Nous allons dans la prochaine section ajouter la possibilité d'épargner dans un REÉR et voir quelle solution émerge.

4.2 Modèle avec actif REÉR

Nous supposons maintenant que le ménage peut, en plus des éléments d'actifs vus précédemment, accumuler sa richesse dans un actif REÉR dont la valeur réelle au temps t est notée $w(t)$. En tout temps le retrait de l'actif REÉR est imposé à un taux m alors que les cotisations donnent lieu à une réduction d'impôt égale à une fraction m de la cotisation. Ainsi, l'impact net sur l'actif liquide d'un flux de cotisation dans l'actif REÉR $\rho(t)$ est $(1 - m)\rho(t)$. Nous supposons que le taux auquel l'actif REÉR est capitalisé est identique au taux d'intérêt sur la dette hypothécaire, le taux r , de sorte que le flux d'accumulation

en t sera de $rw(t)$. L'équation de mouvement de l'actif REÉR sera donc $\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t)$ alors que celle de l'actif liquide est modifiée pour devenir $\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1 - m)\rho(t)$. Rien ne change pour l'équation de $\dot{\alpha}(t)$.

En ce qui concerne les conditions initiales à l'achat, elles sont les mêmes que le modèle de base en ce qui concerne a et α , mais pour ce qui est de w nous aurons $w(t_1) = w(t_1-)$ étant donné que le montant accumulé dans le REÉR avant la date d'achat est considéré comme donné. Finalement, nous devons aussi modifier la fonction de valeur terminale qui devient $V(a(t_2) + \alpha(t_2) + (1 - m)w(t_2), t_2)$ afin de tenir compte de l'imposition de l'actif REÉR lors de sa transformation en liquidités à la date de vente t_2 . Nous supposons donc qu'à t_2 le ménage retire la totalité de son REÉR.

Avec ces différences au modèle de base, le problème de contrôle optimal avec actif REÉR se formule comme suit :

$$\max_{(c(t), h)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} U(c(t), h) dt + V(a(t_2) + \alpha(t_2) + (1 - m)w(t_2), t_2)$$

sous contrainte que :

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1 - m)\rho(t) \\ \dot{w}(t) &= rw(t) + \rho(t) \\ \dot{\alpha}(t) &= r\alpha(t) + v(t)h - rPh \\ a(t_1) &= a(t_1-) - (Ph - D(t_1)) \\ w(t_1) &= w(t_1-) \\ \alpha(t_1) &= Ph - D(t_1) \\ a(t) &\geq 0 \\ a(t_2), w(t_2), \alpha(t_2) \text{ and } t_2 &\text{ free} \end{aligned}$$

avec $v(t) = (r + \pi)D(t_1)e^{-\pi(t-t_1)}(1 - e^{-(r+\pi)(s-t_1)})^{-1}$ où $D(t_1)$ représente la dette hypothécaire.

La fonction hamiltonienne est : $H = e^{-\delta t} U(c(t), h) + \gamma_a(na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t)) + \gamma_\alpha(r\alpha(t) + v(t)h - rPh) + \gamma_w(rw(t) + \rho(t)) + \mu a$

et les conditions nécessaires sont :

$$U_c e^{-\delta t} = \gamma_a \quad (21)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_a[v(t) - n \frac{da(t_1)}{dh}] + \gamma_\alpha[rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dh} - v(t)]) dt \quad (22)$$

ou

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^{\infty} (\gamma_a[v(t) - n \frac{da(t_1)}{dh}] + \gamma_\alpha[rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dh} - v(t)]) dt + \int_s^{t_2} \gamma_a n P dt \quad (23)$$

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t) \quad (24)$$

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (25)$$

$$\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t) \quad (26)$$

$$\dot{\gamma}_a + n\gamma_a = -\mu \quad (27)$$

$$\dot{\gamma}_\alpha + r\gamma_\alpha = 0 \quad (28)$$

$$\dot{\gamma}_w + r\gamma_w = 0 \quad (29)$$

$$\mu a = 0, \quad \mu \geq 0, \quad a \geq 0 \quad (30)$$

$$a(t_2)[\gamma_a(t_2) - \frac{\partial W}{\partial a(t_2-)}] = 0, \quad a(t_2) \geq 0, \quad \gamma_a(t_2) \geq \frac{\partial W}{\partial a(t_2-)} \quad (31)$$

$$\gamma_\alpha(t_2) - \frac{\partial W}{\partial \alpha(t_2-)} = 0 \quad (32)$$

$$\gamma_w(t_2) - \frac{\partial W}{\partial w(t_2-)} = 0 \quad (33)$$

$$H(t_2) + \frac{\partial W}{\partial t_2} = 0 \quad (34)$$

La condition 21 indique l'évolution de l'utilité marginale de la consommation de $c(t)$ dans le temps. Les conditions 22 et 23 ont des interprétations identiques mais diffèrent selon que la date de vente survienne avant ou après que l'hypothèque soit échu. Elles indiquent que la consommation des services du logement doit satisfaire une relation d'égalité entre la valeur présente du flux de service marginal et celle du coût réel net de ces services. Les équations 24, 25 et 26 nous donnent respectivement le taux de changement de a , α et w tandis que l'évolution des prix implicites de ces mêmes actifs est donnée respectivement par les équations 27, 28 et 29. Nous avons donc que les prix implicites de la valeur nette du logement et de l'actif REÉR diminuent au taux r . Par contre,

μ apparaît dans la détermination du prix implicite de l'actif liquide en raison de la contrainte de non-négativité sur la détention d'actif liquide indiquée par l'équation 30. Ainsi, le prix implicite de l'actif liquide doit diminuer au taux n si $a > 0$ mais pourra suivre une trajectoire différente si $a = 0$. Les équations 31, 32, et 33 indiquent pour leur part les conditions de transversalité à satisfaire pour que la valeur des trois actifs soit optimale au moment de la vente du logement. Finalement, la condition 34, donnée par $H(t_2) + \partial V / \partial t_2 = 0$, permet d'établir la date optimale de vente du logement.

Ce modèle permet de montrer que si un ménage a des droits de cotisation inutilisés il ne détiendra pas d'actif liquide. Pour ce faire, procédons par contradiction en supposant que $a(t) > 0$ et montrons que ceci est incompatible avec une solution optimale. En effet, $a(t) > 0$ implique par l'équation 30 que $\mu = 0$ et par conséquent, par l'équation 27, que $\dot{\gamma}_a + n\gamma_a = 0$. Par ailleurs, nous savons par les équations 28 et 29 que $\dot{\gamma}_\alpha + r\gamma_\alpha = 0$ et $\dot{\gamma}_w + r\gamma_w = 0$ de sorte que $\gamma_a(t)$ et $\gamma_w(t)$ seront respectivement donnés par $\gamma_a(t) = \gamma_a(t_1)e^{-n(t-t_1)}$ et $\gamma_w(t) = \gamma_w(t_1)e^{-r(t-t_1)}$ de t_1 à t_2 . Ainsi, le prix implicite de a diminue au taux n tandis que ceux de α et w décroissent au taux r . Il reste à déterminer le niveau absolu de ces prix, ce qui est déterminé par les conditions de transversalité. Or, si la contrainte de non-négativité sur $a(t)$ est lâche, par l'équation 31 on sait que $\gamma_a(t_2) = \frac{\partial V}{\partial a(t_2-)}$ tandis que par les équations 32 et 33 nous aurons que $\gamma_\alpha(t_2) = \frac{\partial V}{\partial \alpha(t_2-)}$ et $\gamma_w(t_2) = \frac{\partial V}{\partial w(t_2-)}$. Par ailleurs, comme $a(t_2) = a(t_2-) + \alpha(t_2-) + (1-m)w(t_2-)$, cela implique que $\frac{\partial a(t_2)}{\partial a(t_2-)} = 1$ et que $\frac{\partial a(t_2)}{\partial w(t_2-)} = (1-m)$. La règle de dérivation en chaîne nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial a(t_2-)} &= \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \frac{\partial a(t_2)}{\partial a(t_2-)} = \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha(t_2-)} &= \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \frac{\partial a(t_2)}{\partial \alpha(t_2-)} = \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \\ \frac{\partial V}{\partial w(t_2-)} &= \frac{\partial V}{\partial a(t_2)} \frac{\partial a(t_2)}{\partial w(t_2-)} = (1-m) \frac{\partial V}{\partial a(t_2)}\end{aligned}$$

On trouve donc les relations suivantes entre les prix implicites à la date t_2 :

$$\gamma_a(t_2) = \gamma_\alpha(t_2) = \frac{1}{(1-m)} \gamma_w(t_2)$$

Juste au moment de vendre, ajouter un dollar à la valeur nette du logement a le même impact sur la valeur du plan qu'augmenter les liquidités du même montant. Par contre, la valeur de l'actif REÉR est moindre car les retraits de cet actif pour le transformer en liquidités sont imposés au taux m .

Qu'en est-il maintenant du prix implicite des actifs avant la vente? Sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ les prix des actifs sont donnés par :

$$\gamma_a(t) = \gamma_a(t_2)e^{n(t_2-t)} \quad (35)$$

$$\gamma_\alpha(t) = \gamma_\alpha(t_2)e^{r(t_2-t)} \quad (36)$$

$$\gamma_w(t) = \gamma_w(t_2)e^{r(t_2-t)} \quad (37)$$

Comme γ_α et γ_w diminuent tous deux au même taux r et que $\gamma_\alpha(t_2) = \frac{1}{(1-m)}\gamma_w(t_2)$ on conclut immédiatement que $\gamma_\alpha(t) = \frac{1}{(1-m)}\gamma_w(t)$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Le prix implicite de l'actif REÉR est toujours dans une proportion $(1-m)$ de celui de la valeur nette du logement en raison du traitement fiscal des cotisations et retraits du REÉR. Quant au prix de l'actif liquide, sachant que $\gamma_a(t_2) = \gamma_\alpha(t_2)$ on a par 36 que $\gamma_\alpha(t_2) = \gamma_\alpha(t)e^{-r(t_2-t)}$. En substituant dans 35 on trouve $\gamma_a(t) = \gamma_\alpha(t)e^{(n-r)(t_2-t)}$. Ainsi, tant que $n < r$, donc que $m > 0$, $\gamma_a(t) < \gamma_\alpha(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Les sentiers des prix implicites sont montrés à la figure 1. Or, si $\gamma_a(t) < \gamma_\alpha(t)$ la valeur du plan augmente en diminuant $a(t)$ pour accroître $\alpha(t)$. Comme ceci est possible si $a(t) > 0$ on aboutit à une contradiction : l'hypothèse que la contrainte de non-négativité sur les liquidités est lâche n'est pas compatible avec un plan optimal si des droits de cotisation sont inutilisés. Par conséquent, il faut que $a(t) = 0$ si le ménage a des droits de cotisation inutilisés. Ainsi, et c'est là un résultat pertinent pour la suite de l'analyse du RAP, le ménage aura toujours $\dot{a}(t) = a(t) = 0$ s'il a des droits de cotisation inutilisés à son REÉR. Dans la situation où l'épargne est possible, elle se fera donc dans l'actif REÉR et la cotisation $\rho(t)$ sera donnée par la résolution de l'équation 24 lorsque $\dot{a}(t) = a(t) = 0$. Nous aurons ainsi une cotisation donnée par l'équation $0 = y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t)$, qui est équivalent à dire que les cotisations au REÉR seront de $\rho(t) = \frac{y - c(t) - v(t)h}{(1-m)}$.

Regardons maintenant ce qu'il advient des sentiers des prix implicites lorsqu'il y a place à l'épargne et que $\dot{a}(t) = a(t) = 0$. Par 31 on sait que $\gamma_a(t_2) \geq \frac{\partial V}{\partial a(t_2-)}$. En combinant avec les autres conditions de transversalité, on obtient $\gamma_a(t_2) \geq \gamma_\alpha(t_2) = \frac{1}{(1-m)}\gamma_w(t_2)$. Mais s'il y a de l'épargne, celle-ci doit se faire dans l'actif REÉR, ce qui implique que $w(t_2-)$ est positif. Mais si $w(t_2-) > 0$ on ne peut pas avoir $\gamma_a(t_2) > \frac{1}{(1-m)}\gamma_w(t_2)$ car si l'actif liquide a une valeur, corrigée pour la taxation, implicitement plus grande que celle de l'actif REÉR, il est alors souhaitable de diminuer un peu l'actif REÉR pour ajouter un peu d'actif liquide. On ne peut donc pas avoir l'inégalité stricte et les prix des actifs à t_2 respectent la double égalité $\gamma_a(t_2) = \gamma_\alpha(t_2) = \frac{1}{(1-m)}\gamma_w(t_2)$.

Quant à la valeur des actifs avant la vente, le sentier du prix implicite de l'actif REÉR évalue en parallèle à $\gamma_\alpha(t)$ car les deux prix diminuent au taux r . Dans le cas du sentier du prix implicite de l'actif liquide, nous pouvons affirmer, par ce qui a été montré précédemment, que μ s'ajustera afin d'avoir un sentier identique à celui du prix implicite de la valeur nette du logement. Autrement, il serait possible d'améliorer le plan en réallouant les actifs pour augmenter la détention d'actif liquide et le plan ne serait plus optimal.

La figure 2 montre la situation lorsque $\mu > 0$ et qu'il y a place à l'épargne dans le modèle. On peut voir que la relation $\mu > 0$ fait en sorte que le sentier du prix implicite de l'actif liquide s'ajuste à celui de la valeur nette du logement. Évidemment, comme $U_c e^{-rt} = \gamma_a$, cela implique que le sentier de consommation

sera modifié de façon à assurer une décroissance du prix implicite de l'actif liquide au taux r . Le cas où les liquidités sont serrées et qu'il n'y a pas d'épargne de la part du ménage ne nous intéresse que superficiellement pour l'instant puisque nous aurons également $\dot{a}(t) = a(t) = 0$.

En somme, en présence de REÉR, le taux pertinent pour l'accumulation de l'épargne du ménage et pour le choix du sentier de consommation n'est plus n comme dans le cas où l'actif REÉR n'est pas intégré au modèle, mais devient plutôt r , le taux d'intérêt réel brut. Notons que ceci permet de simplifier quelque peu le modèle. Ainsi, dans le modèle sans REÉR, il était important de distinguer le cas où $s < t_2$ de celui où $s \geq t_2$ car le taux pertinent pour l'accumulation était r jusqu'à ce que l'hypothèque soit amortie et n par la suite. Or, il n'y a plus lieu de faire une telle distinction dans le modèle avec REÉR car le taux pertinent est r même après que l'hypothèque ait été complètement remboursée puisque le ménage peut épargner dans le REÉR. Dans la prochaine section, nous simplifierons donc la présentation du modèle en supposant que $s = t_2$, ce qui permettra d'alléger la présentation sans perte de généralité. Notons que ceci aura pour conséquence que $a(t_2) = Ph$.

4.3 Modèle avec actif REÉR et RAP

4.3.1 Description du modèle avec actif REÉR et RAP

Il est pertinent de rappeler brièvement la mécanique du RAP pour établir la différence entre le présent modèle et celui avec REÉR seulement. Le RAP permet de retirer en franchise d'impôt un montant des REÉR du participant afin de l'imputer à la valeur nette du logement, en autant que celui-ci effectue les remboursements par annuité dans le cadre du RAP. Pour fins de simplification, nous supposons que la période de remboursement du RAP coïncide avec celle d'amortissement de l'hypothèque s qui, elle-même, correspond à la date de vente du logement. Nous ne permettrons pas non plus à l'individu de choisir de ne pas effectuer ses remboursements et de payer plutôt l'impôt sur les paiements en défaut.⁵ Enfin, nous restreindrons notre analyse au cas où des droits de cotisation inutilisés subsistent.

Avec ces hypothèses, les différences entre ce modèle et celui traité dans la section précédente sont les suivantes. Tout d'abord, si le RAP permet de retirer un montant des REÉR du participant sans pénalité, cela va modifier la condition initiale de l'actif REÉR qui deviendra $w(t_1) = w(t_1-) - s\theta$, où $s\theta$ est le montant retiré dans le cadre du RAP et θ est le remboursement périodique. Comme ce montant réduit ce qui doit être prélevé de l'actif liquide pour effectuer le versement initial lors de l'achat du logement, la condition initiale de l'actif liquide devient $a(t_1) = a(t_1-) - (Ph - D(t_1) - s\theta)$.⁷ Les deux dernières modifications sont causées par les remboursements au REÉR. Ainsi l'équation sur $\dot{a}(t)$ devient $\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1 - m)p(t) - \theta$ tandis que celle

⁵ Bien qu'intéressante, cette possibilité complexifie le modèle et nous n'avons pas été en mesure d'en étudier les implications.

⁷ Notons que $D(t_1)$ n'est pas nécessairement identique à celui du problème précédent.

sur $\dot{w}(t)$ sera $\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t) + \theta$. Tout le reste du modèle est similaire à celui avec actif REER vu à la section précédente, y compris les hypothèses qui y ont été formulées. Il n'est donc pas nécessaire de les répéter. Le modèle sous forme globale donne donc :

$$\max_{(c(t), h)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} U(c(t), h) dt + V(a(t_2) + \alpha(t_2) + (1-m)w(t_2), t_2)$$

sujet à

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1-m)\rho(t) - \theta \\ \dot{w}(t) &= rw(t) + \rho(t) + \theta \\ \dot{\alpha}(t) &= r\alpha(t) + v(t)h - rPh \\ a(t_1) &= a(t_1-) - (Ph - D(t_1) - s\theta) \\ w(t_1) &= w(t_1-) - s\theta \\ \alpha(t_1) &= Ph - D(t_1) \\ a(t) &\geq 0 \\ &a(t_2), w(t_2), \alpha(t_2) \text{ et } t_2 \text{ libres} \end{aligned}$$

La fonction hamiltonienne associée à ce problème ainsi que les conditions nécessaires sont quelque peu modifiées et deviennent :

$$H = e^{-\delta t} U(c(t), h) + \gamma_a(na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1 - m)\rho(t) - \theta) + \gamma_\alpha(r\alpha(t) + v(t)h - rPh) + \gamma_w(rw(t) + \rho(t) + R) + \mu a$$

$$U_c e^{-\delta t} = \gamma_a \quad (38)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_a[v(t) - n \frac{da(t_1)}{dh}] + \gamma_\alpha[rP - r \frac{d\alpha(t_1)}{dh} - v(t)]) dt \quad (39)$$

$$\dot{a}(t) = na(t) + y - c(t) - v(t)h - (1 - m)\rho(t) - \theta(t) \quad (40)$$

$$\dot{\alpha}(t) = r\alpha(t) + v(t)h - rPh \quad (41)$$

$$\dot{w}(t) = rw(t) + \rho(t) + \theta(t) \quad (42)$$

$$\dot{\gamma}_a + n\gamma_a = -\mu \quad (43)$$

$$\dot{\gamma}_\alpha + r\gamma_\alpha = 0 \quad (44)$$

$$\dot{\gamma}_w + r\gamma_w = 0 \quad (45)$$

$$\mu a = 0, \quad \mu \geq 0, \quad a \geq 0 \quad (46)$$

$$a(t_2)[\gamma_a(t_2) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a(t_2-)}] = 0, \quad a(t_2) \geq 0, \quad \gamma_a(t_2) \geq \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a(t_2-)} \quad (47)$$

$$\gamma_\alpha(t_2) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha(t_2-)} = 0 \quad (48)$$

$$\gamma_w(t_2) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w(t_2-)} = 0 \quad (49)$$

$$H(t_2) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t_2} = 0 \quad (50)$$

4.3.2 Solution du modèle

Les modifications ne changent pas certaines propriétés du modèle. Ainsi, bien que nous ne reprenions pas la démonstration ici, il est clair qu'il est encore optimal de cotiser au REÉR lorsque l'épargne est possible, de sorte que le taux d'intérêt pertinent pour le rythme d'évolution de la consommation est r plutôt que n . De même, nous aurons assurément la relation $\dot{a}(t) = a(t) = 0$. L'effet sur la demande de capital résidentiel s'étudie en analysant l'effet d'un changement dans le montant du RAP sur le choix optimal de h . En fait, ceci revient à étudier le gain de richesse découlant du RAP. Nous allons montrer comment se répartit ce gain de richesse selon deux situations, soit lorsqu'il y a épargne et lorsqu'il n'y en a pas.

Comme $\dot{a}(t) = a(t) = 0$, nous avons par (40) que $y = c(t) + v(t)h + (1 - m)\rho(t) + \theta(t)$. Pour montrer les ajustements qui prendront place procédons par contradiction en supposant qu'aucun changement ne se produit dans $c(t)$ ou

dans h . Comme il y a un gain de richesse associé au RAP, il en découle alors que le RAP aura permis d'accumuler une richesse plus grande à t_2 . Comme $a(t_2) = 0$ et que $\alpha(t_2) = Ph$ qui n'a pas varié par hypothèse, cette richesse supplémentaire doit nécessairement se trouver dans le REÉR. Donc, $w(t_2-)$ a augmenté. Mais si $w(t_2-)$ est plus grand, il faut par (48) que $\gamma_w(t_2)$ diminue car $\frac{\partial V}{\partial w(t_2-)}$ est concave. Or, si $\gamma_w(t_2)$ diminue sans que $\gamma_o(t_2)$ change, ceci viole les conditions de transversalité qui établissent que $\gamma_o(t_2) = \frac{1}{(1-m)}\gamma_w(t_2)$. Il n'est donc pas conforme à un plan optimal de n'augmenter ni $c(t)$ ni h . De fait, pour rétablir la condition sur la valeur respective des prix de ces deux actifs à t_2 il faut que l'épargne accrue sous forme de REÉR s'accompagne d'une accumulation plus forte de richesse dans le capital résidentiel. Il faut donc que h augmente proportionnellement à l'augmentation de richesse observée à t_2 . L'effet du RAP sur la demande de logement est donc positif. Il convient maintenant de vérifier si cette augmentation de richesse, juxtaposée à une consommation accrue de capital résidentiel, mène à une hausse de $c(t)$.

Si la consommation de capital résidentiel h augmente, l'utilité marginale retirée de la consommation de capital résidentiel diminuera. En d'autres mots, par l'équation 39, nous aurons que $\int_{t_1}^{t_2} U_h e^{-\delta t} dt$ diminuera ce qui laisse présager que γ_o ou γ_a , ou les deux à la fois, baisseront. Supposons que c'est γ_o qui décroît mais que γ_a ne bouge pas. Alors, en particulier, $\gamma_o(t_2) \neq \gamma_a(t_2)$. Or, nous avons montré que dans le cas où l'épargne est accessible au ménage nous devions avoir égalité entre ces deux prix implicites en t_2 , ce qui contredit notre supposition. Ainsi, il est facile de voir que la seule solution dans ce cas est que les deux prix implicites diminuent ensemble pour s'égaliser sur $[t_1, t_2]$. Sachant que le prix implicite de l'actif liquide baisse, par l'équation 38 nous savons alors que l'utilité marginale que le ménage retire de la consommation de $c(t)$ doit décroître également. Ceci nous amène à conclure que la consommation de $c(t)$ augmente. En fait, comme le prix relatif des services du logement n'a pas changé, la hausse de consommation de l'agrégat hicksien doit être suffisante pour maintenir constant le ratio moyen des flux de consommation des services du logement et de l'agrégat hicksien. En somme, il y aura hausse de la consommation et de la demande de logement proportionnelle à l'augmentation de richesse à la fin du plan.

Poursuivons l'analyse plus avant et regardons de quelle façon le RAP influence les décisions d'emprunt hypothécaire. Comme $w(t_2-)$ a augmenté mais que $w(t_1)$ a diminué, il faut que le flux de cotisation au REÉR $\rho(t)$ soit plus grand sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ que le flux de cotisation $\rho(t)$ du modèle sans RAP, car il faut non seulement effectuer les remboursements θ mais également compenser la perte des intérêts qui auraient fructifié dans le REÉR si le retrait du RAP n'avait pas eu lieu. Or, on sait aussi que $c(t)$ et h augmentent eux-aussi. Par conséquent, dans la contrainte $y = c(t) + v(t)h + (1-m)\rho(t) + \theta(t)$, le seul élément qui peut s'ajuster à la baisse dans la partie de droite pour assurer le respect de l'égalité est $v(t)$. Or, il est clair par (6) que ceci requiert une baisse de $D(t_1)$.

5 CONCLUSION

Le but de ce travail était de déterminer l'impact du RAP sur la demande de logement. Nous avons choisi de l'étudier dans le cadre d'un modèle de cycle vital en temps continu. Cette démarche nous a amené à tout d'abord étudier l'avantage pécuniaire du RAP. Nous avons montré que sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt identique sur tous les actifs et toutes les dettes, un ménage qui participe au RAP retire un gain de richesse dont la valeur est proportionnelle à son taux d'imposition. Ce gain de richesse tire son origine dans le fait que le RAP consiste à recevoir du gouvernement un prêt sans intérêt dont le principal est égal à l'impôt auquel le retrait du REÉR aurait normalement dû être assujéti et dont la durée s'étend jusqu'à la date à laquelle le ménage est tenu de recotiser à son REÉR. La valeur exacte de ce prêt varie selon que le ménage doit ou non emprunter pour effectuer ses cotisations. Le gain favorise les ménages ayant les revenus les plus hauts car ce sont eux les plus imposés à la marge.

Lorsqu'est venu le temps d'intégrer l'analyse dans le cadre d'un modèle de cycle vital, nous avons tout d'abord étudié en quoi le REÉR change les choix. La principale différence est que la possibilité de faire fructifier ses épargnes au taux r modifie le sentier de consommation. En ajoutant le RAP, nous avons ensuite montré que le RAP fait diminuer l'emprunt initial. De plus, en raison de l'effet de richesse associé au RAP, on observera chez les participants une augmentation de la consommation de capital résidentiel et des biens autres que le logement. Ce point est en accord avec le commentaire de Thérioux (1999) qui stipule que les "sommes d'argent qui devraient être systématiquement investies pour assurer [la retraite du ménage] servent bien souvent à acheter plutôt une maison de plus grande valeur". Par contre, l'achat d'une résidence plus coûteuse et la hausse de consommation du bien composite ne constituent pas un obstacle à l'accumulation de richesse puisque nous montrons que la richesse terminale s'accroît également. Enfin, comme le remboursement des retraits du RAP revient à une décision d'épargner ou non au taux r , rien ne s'oppose à ce qu'un ménage participe au RAP pour tirer avantage de l'effet de richesse sans pour autant que ce ménage soit désireux d'épargner. Les ménages qui n'épargnent pas n'ont donc pas d'incitations à rembourser le retrait.

Un développement subséquent du modèle qui serait intéressant consisterait à rendre endogène la date d'achat. Puisque Fortin (1988) avait montré que l'achat se fait aussitôt que le ménage satisfait les contraintes d'emprunt, on s'attendrait à pouvoir montrer que le RAP permet de devancer l'achat de la résidence car il facilite l'accumulation du versement initial.

Références

- [1] Akyeampong, Ernest B. (2000), "Utilisation des REÉR dans les années 90", *L'Emploi et le revenu en perspective*, Statistique Canada, vol.12, no.1, pp.9-16.
- [2] Artle, Roland et Pravin Varaiya (1978), "Life cycle consumption and homeownership", *Journal of Economic Theory* 18, pp.38-58.
- [3] Ascali, Louis (1996), *Les Secrets de la préparation financière à la retraite*, Éditions du CRP, 189 pages.
- [4] Boadway, Robin W. et Harry M. Kitchen (1999), *Canadian Tax Policy: Canadian Tax Paper no.103*, 3e édition, Toronto, 504 pages.
- [5] Clayton, F.A (1974), "Income Taxes and Subsidies to Homeowners and Renters : A comparison of U.S and Canadian Experience", *Canadian Tax Journal*, vol.22, pp.295-305.
- [6] DeMont, Philip (1997), "Interest rates are at an all-time low. Now's the time for home buyers to consider their options", *Canadian House and Home*, vol.19, no.6, pp.56-68.
- [7] Fortin, Mario (1991), "Une comparaison des taux d'imposition implicites des services du logement locatif et du logement occupé par son propriétaire", *L'actualité Économique*, vol.67, no.1, pp.37-57.
- [8] Fortin, Mario (1989), "Inflation, taxes, liquidity constraints and the demand for housing", Université de Sherbrooke, Département d'économique, Cahier 98-02, 24 pages.
- [9] Fortin, Mario (1988), "L'inflation, la fiscalité et la demande de logement occupé par son propriétaire : un modèle d'intégration", Thèse de Doctorat présentée à l'Université Laval, 136 pages.
- [10] Fortin, Mario et André Leclerc (2000), "Perspective à long terme de la demande de prêts hypothécaires au Canada", Rapport préparé pour la SCHL, 98 pages.
- [11] Frenken, Hubert (1998), "Régime d'accession à la propriété", *L'Emploi et le revenu en Perspective*, Statistique Canada, vol.10, no.2, pp.41-44.
- [12] Kamien, Morton I. et Nancy Schwartz (1981), *Dynamic Optimisation. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, New-York, 331 pages.
- [13] Kearl, J.R (1979), "Inflation, Mortgages and Housing", *Journal of Political Economy*, vol.87, pp.1115-1138.
- [14] Manouchchri, Ali (1999), "Le Régime d'accession à la propriété a aidé plus de 110 000 personnes en 1998. *Tendances du Marché Hypothécaire*, SCHL-CMHC Canada, pp.10-11.
- [15] "Régime d'accession à la propriété (RAP)- Participants pour 1998" (1998), Brochure de l'agence des douanes et du revenu, 25 pages.
- [16] Shelton, John P. (1968), "The cost of renting versus owning a home", *Land Economic Review*, no.44, pp.59-72.

- [17] Statistique Canada (2000), "Les habitudes de dépenses au Canada", no.62-202-XIF au catalogue, Ottawa, p.95.
- [18] Théroneux, Pierre (1999), "Régime d'accession à la propriété (RAP) : plusieurs questions à se poser avant de rapper", *Les Affaires, Cahier spécial : Les REÉR*, samedi 13 février, B23.
- [19] Thomas Yaccato, Joanne (1997), "Where should the money go? The homeowner's tax-time dilemma. What to pay first : RRSP or mortgage?", *Chateleine*, vol.70, no.2, p.28.
- [20] Wheaton, William C. (1985), "Life Cycle Theory, Inflation and the demand for housing", *Journal of Urban Economics* 18, pp.161-179.

ANNEXE 1 : DÉMONSTRATIONS DU GAIN DU RAP

Calcul du gain avec remboursement au RAP et sans emprunt.

Débutons en regardant ce qui se passe du côté de l'accumulation des trois actifs lorsque le RAP n'est pas utilisé par le ménage. Initialement nous avons une richesse $R = a + (Ph - D) + w(1 - m)$, où R est la richesse, a représente les liquidités, $Ph - D$ est la valeur nette du logement, m est le taux d'imposition des revenus personnels du ménage et w est l'actif REÉR.

L'accumulation de l'actif liquide capitalisé au taux n pendant k années est donné $a(1 + n)^k$. La dette hypothécaire D est pour sa part capitalisée au taux r . Ainsi la valeur nette après k années est donnée par $Ph - D(1 + r)^k$. L'actif REÉR, qui est également capitalisé au taux r , vaut $w(1 + r)^k$ après k années. Ces formules sont bien connues en analyse financière. La richesse du ménage, sans l'utilisation du RAP, après k années, s'établira donc à $R = a(1 + n)^k + Ph - D(1 + r)^k + (1 - m)w(1 + r)^k$.

Ensuite, voyons quelle est l'accumulation des trois actifs lorsque le RAP est utilisé. Initialement nous constatons une richesse $R^* = a + (Ph - D + k\theta) + (w - k\theta)$, où R^* est la richesse, a sont les liquidités, $Ph - D$ est la valeur nette du logement, $k\theta$ est le montant retiré dans le cadre du RAP de sorte que θ est le remboursement exigé, et w est l'actif REÉR.

L'accumulation de l'actif liquide après :

un an : $a(1 + n) - \theta$

deux ans : $a(1 + n)^2 - \theta(n + 2)$

trois ans : $a(1 + n)^3 - \theta(n^2 + 3n + 3)$

quatre ans : $a(1 + n)^4 - \theta(n^3 + 4n^2 + 6n + 4)$

Nous voyons un schéma général se développer. Le terme affecté de θ dans les équations, provenant des remboursements au titre du RAP, peut être simplifié par le terme équivalent $\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$ qui est la formule d'une annuité capitalisée au taux n pendant k années. Si nous poursuivions les calculs, nous verrions que pour k années l'accumulation de l'actif liquide serait donnée par : $a(1 + n)^k - \theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$

La valeur nette du logement après :

un an : $Ph - (D - k\theta)(1 + r)$

deux ans : $Ph - (D - k\theta)(1 + r)^2$

trois ans : $Ph - (D - k\theta)(1 + r)^3$

Il est facile de voir que de façon générale nous aurons : $Ph - (D - k\theta)(1 + r)^k$

Accumulation de l'actif REÉR après :

un an : $(w - k\theta)(1 + r) + \theta$

deux ans : $(w - k\theta)(1 + r)^2 + \theta(r + 2)$

trois ans : $(w - k\theta)(1 + r)^3 + \theta(r^2 + 3r + 3)$

Nous remarquons, de façon similaire à ce que nous avons vu auparavant, que le terme affecté de θ peut être réduit sous la forme $\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right]$, de sorte que le schéma général de l'accumulation de l'actif REÉR sera donné par :

$$(1-m) \left[(w - k\theta)(1+r)^k + \theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, la richesse totale en utilisant le RAP sera donnée par } R' = & a(1+n)^k - \theta \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right] + Ph - (D - k\theta)(1+r)^k + (1-m)(w - k\theta)(1+r)^k \\ & + \theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] (1-m) \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de voir si $R' - R > 0$ pour constater que, dans le présent cas, le RAP procure un gain de richesse face à la situation où le ménage n'y participerait pas. Or,

$$\frac{R' - R}{\theta} = \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] - m \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] + km(1+r)^k - \left[\frac{(1+n)^k - 1}{n} \right]$$

Or, si $m = 0$ les deux membres du milieu de la partie de droite sont zéro. De plus, dans un tel cas $n = r$ de sorte que la première et la dernière partie s'annulent. Ainsi, $R' = R$ si $m = 0$. Si $m > 0$, cela implique $r > n$. Par analyse combinatoire nous voyons qu'alors $\frac{(1+r)^k - 1}{r} > \frac{(1+n)^k - 1}{n}$ et que $km(1+r)^k > m \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right]$. Donc, $R' - R > 0$ si le taux d'imposition est positif et le ménage retire un gain de l'utilisation du RAP face à la situation alternative. La démonstration des autres situations se fait de façon similaire.

Calcul du gain sans remboursement au RAP et sans emprunt.

Dans le cas où le ménage décide de participer au RAP mais de ne pas effectuer les remboursements dans le cadre du RAP, il y a modification des équations d'accumulation. Notons d'abord que les équations dans la situation où le ménage décide de ne pas participer au programme demeurent inchangées, étant identiques à la démonstration précédentes. C'est donc au niveau de la participation au RAP que les équations se verront modifiées.

Le ménage est tenu selon les termes du RAP d'effectuer des remboursements sous formes d'amutités. Si le ménage néglige ces paiements, il est imposé sur ces mêmes montants puisqu'ils sont alors considérés comme un revenu. Regardons ce que change le fait de négliger ces remboursements sur les équations d'accumulation des trois actifs considérés.

L'accumulation de l'actif liquide après :

un an : $a(1+n) - m\theta$

deux ans : $[a(1+n) - m\theta](1+n) - m\theta = a(1+n)^2 - m\theta(n+2)$

trois ans : $[a(1+n)^2 - m\theta(n+2)](1+n) - m\theta = a(1+n)^3 - m\theta(n^2 + 3n + 3)$

De façon générale nous aurons après k années $a(1+n)^k - m\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$

L'accumulation de la valeur nette du logement sera donnée par $Ph - (D - k\theta)(1+r)^k$ tout comme dans la démonstration qui précède celle-ci.

L'accumulation de l'actif REÉR va comme suit : $(1-m)(w - k\theta)(1+r)^k$. Ainsi la richesse provenant du fait d'utiliser le RAP, après k années sera de :

$$R^* = a(1+n)^k - m\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right] + Ph - (D - k\theta)(1+r)^k + (1-m)(w - k\theta)(1+r)^k$$

Nous savions déjà par la démonstration précédente que la richesse lorsque le ménage n'utilise pas le RAP est de $R = a(1+n)^k + Ph - D(1+r)^k + (1-m)w(1+r)^k$, de sorte qu'en faisant la différence entre R^* et R nous obtenons

$$R^* - R = -m\theta \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right] + k\theta(1+r)^k - (1-m)k\theta(1+r)^k$$

$$\frac{R^* - R}{\theta m} = -m \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right] + k(1+r)^k - (1-m)k(1+r)^k$$

Après simplification cette expression devient :

$$\frac{R^* - R}{\theta m} = k(1+r)^k - \left[\frac{(n+1)^k - 1}{n} \right]$$

et nous savons que cette différence est positive, ce qui complète cette partie de démonstration. Le lecteur peut utiliser la même procédure pour prouver le gain avec remboursement dans le cadre du RAP et avec emprunt pour effectuer le retrait initial.

Calcul du gain avec remboursements au RAP et emprunts.

Nous allons finalement montrer qu'il existe un gain même si le ménage effectue les remboursements dans le cadre du RAP, et que pour faire ces remboursements il doit emprunter la somme du remboursement à un taux r . Supposons de surcroît que le ménage n'a pas de liquidités initialement. Notons que l'accumulation de a et w se fera de façon similaire à ce que nous avons vu précédemment, à savoir qu'après k années nous aurons $(1-m)(w-k\theta)(1+r)^k + \theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right]$ pour w et $Ph - (D - k\theta)(1+r)^k$ pour a . La différence survient du côté de l'accumulation de a . En effet, après un an le ménage doit emprunter θ afin d'effectuer le premier versement. Après deux ans le ménage doit θ plus les intérêts sur ce montant, et il emprunte de nouveau θ pour faire face au second versement dans le REÉR. Ceci se traduit par $-\theta(1+r) - \theta = -\theta(r+2)$. Après trois ans le ménage doit $\theta(r+2)$ plus les intérêts sur ce montant, et il emprunte de nouveau θ , ce qui nous donne après trois ans l'équation du type $-\theta(r+2)(r+1) - \theta = -\theta(r^2 + 3r + 3)$. Après quatre ans le ménage doit $\theta(r^2 + 3r + 3)$ plus les intérêts sur ce montant, et il emprunte de nouveau θ , ce qui nous donne $-\theta(r^3 + 4r^2 + 6r + 4)$. De façon générale nous aurons l'équation suivante, c'est-à-dire qu'après k années nous aurons $-\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right]$.

Il nous reste, comme dans les deux démonstrations précédentes, à montrer que $R^* - R > 0$. Or $R^* - R = -\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] + Ph - (D - k\theta)(1+r)^k + (1-m)(w - k\theta)(1+r)^k$

+ $\theta \left[\frac{(1+r)^k - 1}{r} \right] - Ph + D(1+r)^k - (1-m)w(1+r)^k$, ce qui est équivalent à l'expression suivante : $R^* - R = mk\theta(1+r)^k > 0$

Ceci prouve donc qu'il existe un gain même dans cette situation, lequel est égal au montant initialement retiré du REÉR multiplié par le taux d'imposition et capitalisé pendant k années au taux r .

ANNEXE 2 : FIGURES

Prix implicites lorsque $a(t) > 0$

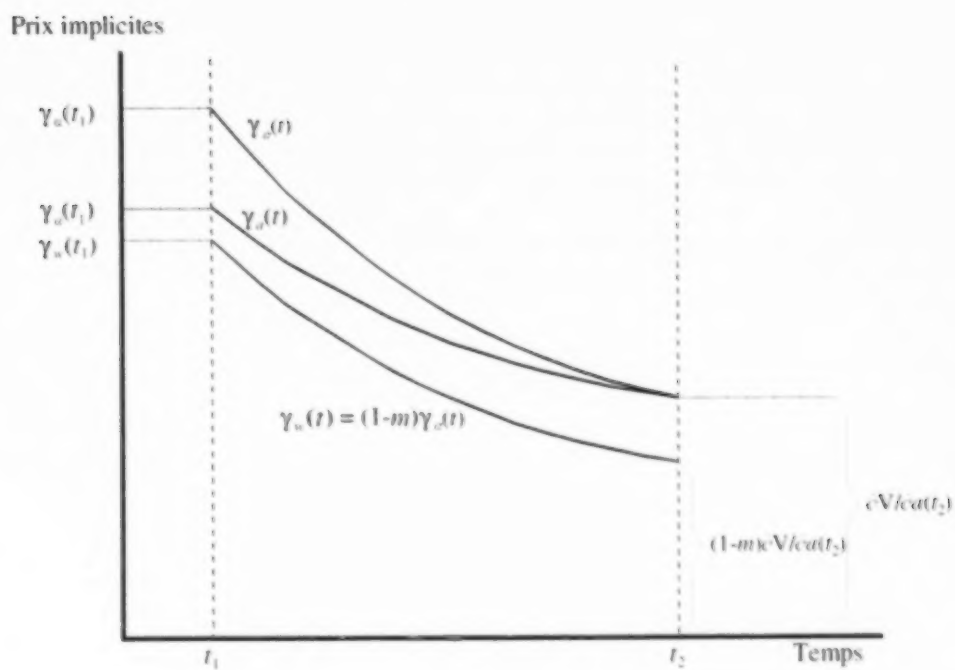


FIG. 1 -

Prix implicites lorsque $a(t) = 0$

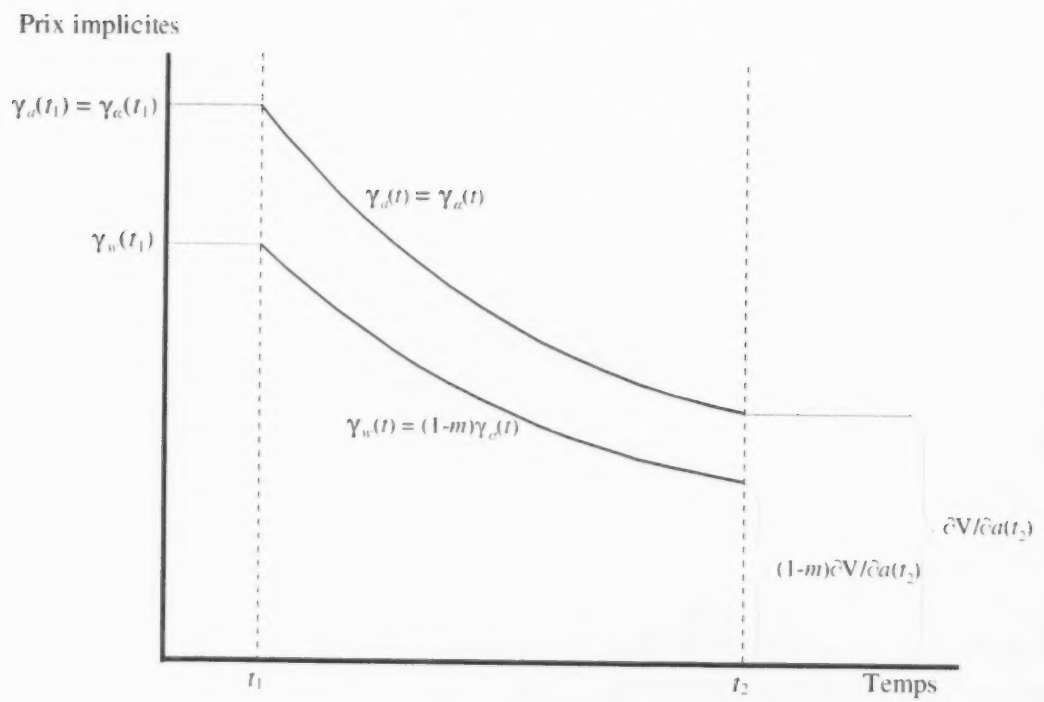


FIG. 2

ANNEXE 3 : LISTE DES SYMBOLES

i : Taux d'intérêt nominal sur l'actif liquide, sur l'actif REÉR et sur la dette hypothécaire.

m : Taux marginal d'imposition marginal des revenus.

π : Taux d'inflation

r : Taux d'intérêt réel brut (avant impôt).

n : Taux d'intérêt réel net (après impôt).

a : Valeur réelle de l'actif liquide.

w : Valeur réelle de l'actif REÉR.

P : Prix réel d'achat d'une unité du logement.

h : Nombre d'unités de logement achetées ainsi que le flux de services retiré du logement.

D : Valeur réelle de la dette hypothécaire.

α : Valeur nette du logement.

R : Richesse réelle du ménage.

θ : Montant périodique à recotiser REÉR pour rembourser le retrait permis par le RAP.

k : Nombre maximal de périodes autorisé pour rembourser le retrait permis par le RAP.

t_1 : Début du plan et date d'achat du logement.

t_2 : Date de vente du logement.

T : Fin du plan.

y : Flux de revenu réel.

c : Taux de consommation instantané de l'agrégat hicksien qui sert de numéraire.

δ : Taux de préférence temporel pur.

v : Flux de déboursés requis pour amortir la dette hypothécaire d'une unité de capital.

s : Durée du plan d'amortissement de l'hypothèque.

$V(\cdot, t_2)$: Fonction de valeur terminale, le premier argument étant la richesse réelle à t_2 .

γ_a : Prix implicite de l'actif liquide.

γ_α : Prix implicite de la valeur nette du logement.

γ_w : Prix implicite de l'actif REÉR.

μ : Prix implicite de la contrainte de non-négativité sur l'actif liquide.

ρ : Valeur réelle de la cotisation au REÉR.

Visitez notre page d'accueil à l'adresse suivante : www.schl.ca